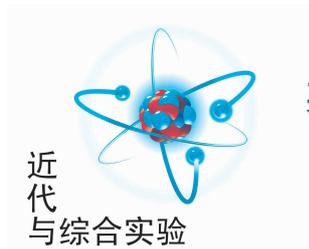


文章编号:1005-4642(2022)11-0013-07



基于共模电感的 RLC 电路非线性动力学研究

苏 籍, 白在桥

(北京师范大学 物理学系, 北京 100875)

摘 要: 基于共模电感搭建了非线性 RLC 电路, 该电路的非线性来自共模电感的饱和与磁滞特性. 通过调节驱动信号的幅度或频率, 电路表现出倍周期分岔、阵发、激变和多吸引子共存等丰富的动力学现象. 建立了简化的共模电感模型, 发现忽略共模电感的磁滞, 该电路可以用含周期驱动项的二阶常微分方程描述. 数值模拟仿真结果表明: 基于该简化模型, 可以复现绝大部分实验现象.

关键词: RLC 电路; 共模电感; 非线性动力学

中图分类号: O415; TM132

文献标识码: A

DOI: 10.19655/j.cnki.1005-4642.2022.11.002

非线性动力学研究兴起于上世纪 60 年代, 从研究对象和方法上扩展了当代物理学的内容, 并从观念上改变了人们对经典物理决定论的认识. 将非线性动力学实验引入基础物理实验教学, 可以引导学生从动力学的角度认识物理系统, 激发学生探索自然规律的兴趣. 由于课时和背景知识的限制, 这类实验的教学目标应使学生认识典型的非线性动力学现象和规律, 并了解动力学的研究方法.

非线性动力学的研究对象具有普适性, 在不同的物理体系中都有体现. 相比于力学系统, 电学系统(混沌电路)具有稳定性好、时间尺度短、便于调节控制参量和数据采集等优点, 在非线性动力学实验研究中具有更高的可行性. 最早验证费根鲍姆关于倍周期分岔通往混沌道路普适性的实验就是在非线性电路上完成的^[1], 该电路采用变容二极管作为非线性元件. 基于非线性电阻的蔡氏电路(Chua's circuit)则被广泛应用于科研和教学中^[2]. 关于混沌电路的详细介绍可以参考文献^[3-7].

上世纪 90 年代北京师范大学在本科教学中引入非线性动力学实验, 其中包括以磁环电感作为非线性元件的混沌电路^[8-10]. 该电路含有 3 个

绕组的特制变压器, 在电路中 3 个绕组分别接成直流偏置、无源 RLC 振子和驱动 RLC 振子, 如图 1 所示. 选择合适的参量, 通过这个电路可以观察到通过倍周期分岔到混沌的过程.

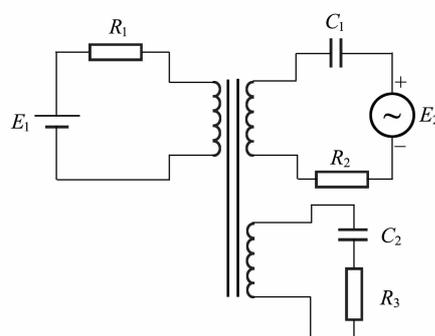


图 1 含有 3 个绕组的变压器非线性电路

本文对该混沌电路进行改进: 1) 简化电路, 省去无源 RLC 振子部分, 同时使用商品共模电感替代特制变压器, 便于在教学中推广; 2) 对电路进行数学建模, 该模型可以复现大部分实验现象, 从而加深学生对混沌电路原理的理解.

除了倍周期分岔和混沌, 改进的电路还可以出现阵发、激变、多吸引子共存等动力学现象, 可以更好地应用于基础物理实验教学.

收稿日期: 2022-03-17; **修改日期:** 2022-07-11

作者简介: 苏 籍(1996—), 女, 重庆江津人, 北京师范大学物理学系 2019 级硕士研究生, 研究方向为非线性动力学. E-mail: 201921140011@mail.bnu.edu.cn

通讯作者: 白在桥(1971—), 男, 重庆涪陵人, 北京师范大学物理学系副教授, 博士, 研究方向为非线性动力学. E-mail: phybai@163.com

1 实验装置

1.1 共模电感

共模电感本质为 1 : 1 的变压器,如图 2 所示,常用于滤除电源线的共模干扰.由于一次和二次绕组的匝数相同,磁场强度 H 正比流过 2 个绕组的电流的代数和,即

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t), \quad (1)$$

根据电磁感应原理,忽略漏磁,2 个绕组的电压为

$$u_1(t) = u_2(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}, \quad (2)$$

其中, $\Phi(t)$ 为绕组的总磁通量,等于磁环的磁通量与绕组匝数的乘积.对于线性电感,在任意时刻 Φ 和 I 成正比,即 $\Phi(t) = MI(t)$,根据式(1)和式(2),可以得到

$$u_1(t) = u_2(t) = M \frac{dI_1(t)}{dt} + M \frac{dI_2(t)}{dt}, \quad (3)$$

其中,比例系数 M 为每个绕组的自感量或它们之间的互感量(忽略漏磁,则二者相等).但实际磁环材料存在饱和与磁滞现象,这是共模电感元件非线性的来源.值得注意的是,磁滞现象意味着 $\Phi(t)$ 与 I 在 t 时刻之前的变化历史有关,一般不能写成 $I(t)$ 的单值函数.

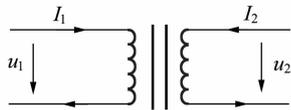


图 2 共模电感电路

在一次绕组中通入交流周期电流 $I_1(t)$,测量二次绕组的开路电压 $u_2(t)$,采用傅里叶变换计算其积分得到 $\Phi(t)$.图 3 所示为不同电流幅度(频率为 750 Hz)的 7 条实测 $\Phi-I$ 关系曲线.

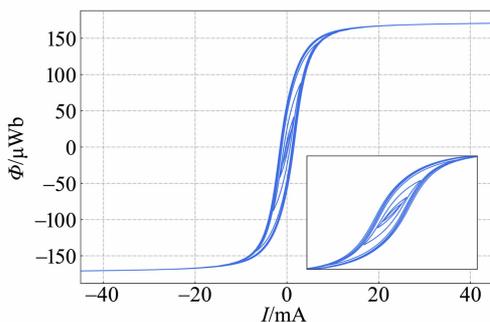


图 3 实测共模电感特性(插图为曲线局部放大图)

这些曲线经过适当的标度后就是磁环材料的磁滞回线^[11].从图 3 中可以看出磁滞回线很窄,表明磁环为软磁材料,而且 mA 量级的电流可以产生明显的饱和现象[作为滤波元件时, $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 基本反相, $I(t)$ 很小].

1.2 实验电路

改进的实验电路如图 4 所示,其中, E_1 为直流电源, E_1/R_1 称为偏置电流; E_2 为正弦信号发生器,输出波形为激励信号,其峰峰值记为 V_{pp} .为了减小信号发生器的输出阻抗,激励信号需要经过功率放大器(图中未画)再接入电路.

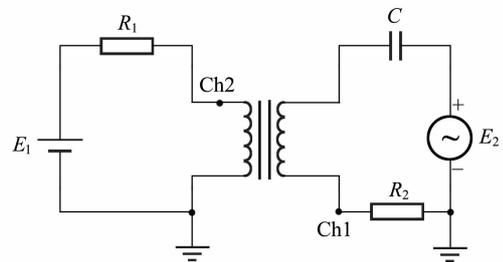


图 4 非线性 RLC 电路

实验中,用示波器通道 1 观察 R_2 两端的电压 $v_2(t)$ (与回路电流成正比),通道 2 观察一次绕组的感应电压 $u_1(t)$.在不严格的意义上,下文称用 XY 方式显示的曲线为轨迹图.

2 实验现象与分析

典型非线性动力学现象具有结构稳定性,因此电路元件取值(在一定范围内)并不影响实验效果.本节实验现象是在 $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 4.1 \Omega$, $C = 9.4 \mu\text{F}$, $E_1 = 24 \text{ V}$, $f = 750 \text{ Hz}$ 时得到的.逐渐升高 V_{pp} ,系统会表现出与一维 logistic 映射相似的混沌带与周期窗口相互嵌套的复杂结构^[12].图 5 所示为有代表性的轨迹图(图 5 由示波器保存的数据绘制).

2.1 通过倍周期分岔达到混沌

电阻和磁环(由于存在磁滞)都会把电能转换为热能,因此本实验电路是耗散系统.倍周期分岔是耗散系统中最常见的通往混沌的道路,图 5(a)~(f)体现了该过程.理论上倍周期分岔可以一直进行下去,由于信号源调节以及数据采集的精度有限,再加上电路噪声的影响,实验上只看到了 4 次倍周期分岔.

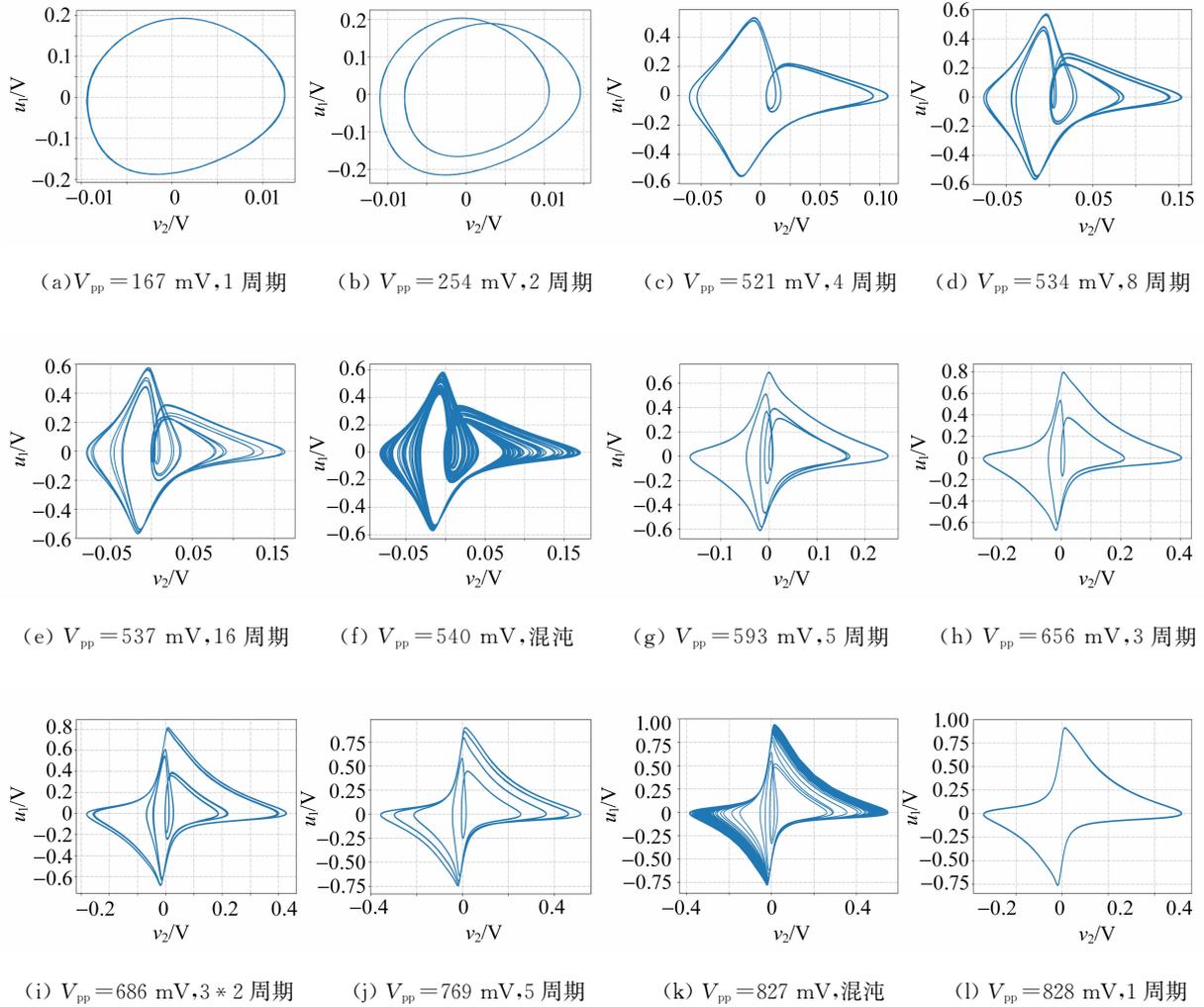


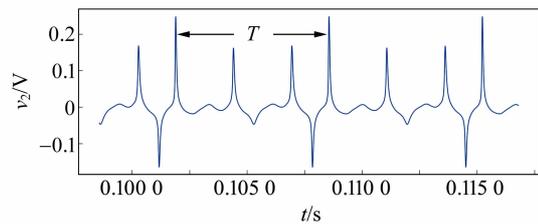
图 5 不同 V_{pp} 下的轨迹图

2.2 周期窗口

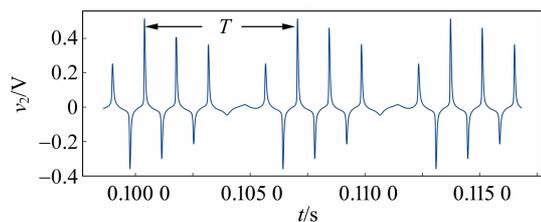
继续增大 V_{pp} , 电路出现一系列稳定的周期轨道, 如图 5(g)~(j) 所示. 实验上可以找到周期数从 3 到 10 (相对驱动信号周期) 的初级 (不是某个倍周期分岔的产物) 周期轨道. 相反, 每条初级周期轨道都会随着 V_{pp} 的增大而发生倍周期分岔, 从而形成一段规则运动的窗口. 相邻的初级周期窗口之间为混沌带.

图 5 (g) 和 5(j) 都是 5 周期轨道, 但是这 2 条轨道的特征存在明显区别: 前者的 v_2 在 1 个周期内出现了 3 个正向大尖峰和 1 个负向尖峰, 而后者有 4 个正向尖峰和 3 个反向尖峰, 具体如图 6 所示.

表 1 为部分代表性轨道以及特征. 表 1 中 $n \times 2^m$ 表示初级 n 周期轨道经过 m 次倍周期分岔后的轨道.



(a) $V_{pp}=593$ mV



(b) $V_{pp}=769$ mV

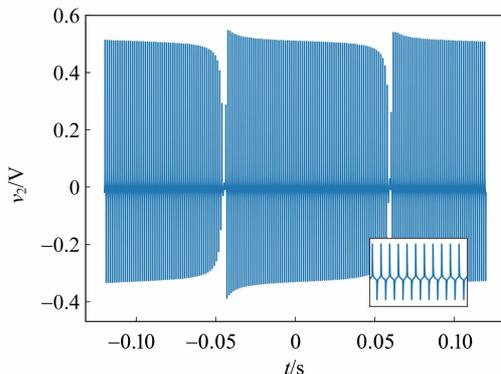
图 6 2 条不同的 5 周期轨道

表 1 部分代表性轨道及特征($f=750$ Hz)

轨道周期	V_{pp}/mV	特征
1	167	
1×2	254	
1×4	521	倍周期分岔
1×8	534	
1×16	537	
混沌	540	混沌
6	550	
6×2	552	周期窗口
5	593	
5×2	598	
3	656	
3×2	686	范围较宽的周期窗口
3×4	715	
4	735	
4×2	759	
5	769	
6	786	周期窗口
7	796	
8	803	
9	808	
10	811	
混沌	827	阵发
1	828	周期

2.3 阵发

当 V_{pp} 不断增加, 系统最终会归于如图 5(l) 所示的 1 周期轨道. 此时如果降低 V_{pp} , 系统会连续返回如图 5(k) 所示的混沌状态. 这里从规则变化到混沌的过程是通过阵发实现的. 阵发的特点是大部分时间轨道看起来是规则的, 但偶尔会插入一段不规则的运动, 如图 7 所示.

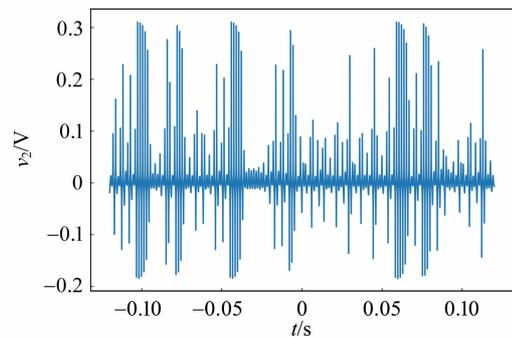
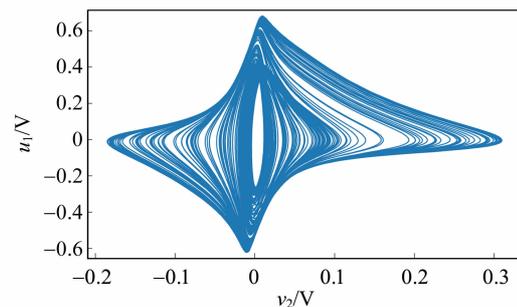
图 7 阵发轨道的电流波形($V_{pp}=827$ mV)

随着 V_{pp} 趋向临界值, 规则片段(图 7 插图) 的长度趋于无穷, 最终回到周期轨道. 事实上, 每条初级周期轨道都是通过阵发的形式从混沌带的边缘产生, 其中最后的阵发过程最为明显.

2.4 激变

激变是有别于倍周期和阵发的另一种常见的通往混沌的道路^[13]. 激变的含义: 在参量接近阈值之前, 系统处于混沌状态, 而超过阈值后, 原来的混沌轨道成为瞬态, 最终会离开该区域, 进入相空间的另一部分. 与阵发不同的是, 激变属于全局分岔, 当扫描参量接近突变点时, 激变的轨道一直保持无规则状态, 不会出现长时间的规则片段.

在 $E_1=12$ V, $f=650$ Hz 时可观察到激变现象. 逐渐增加 V_{pp} , 在 $V_{pp}=636$ mV 时系统还处于混沌状态, 如图 8 和 9(a) 所示. 当 $V_{pp}=637$ mV 时, 吸引子突变为周期轨道, 如图 9(b) 所示, 表明 V_{pp} 在 636~637 mV 之间, 电路发生了激变. 此外, 当 V_{pp} 超过临界值到达周期轨道之后, 再逐渐减小 V_{pp} , 由上向下经过突变点, 周期轨道并不会立即变成混沌轨道, 即激变是不可逆的. 继续减小 V_{pp} , 周期轨道可以保持到 $V_{pp}=610$ mV, 然后在 $V_{pp}=609$ mV 时突变为混沌轨道, 时间波形图和轨迹图与图 8 和图 9(a) 相似.

图 8 激变前的混沌轨道($V_{pp}=636$ mV)(a) $V_{pp}=636$ mV

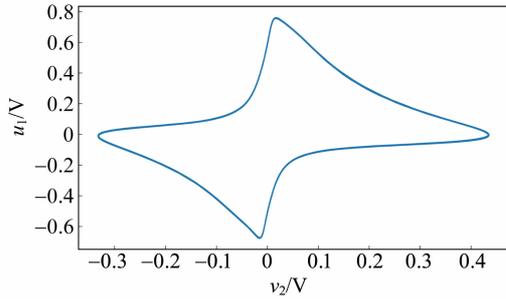
(b) $V_{pp} = 637 \text{ mV}$

图 9 激变前后的轨迹图

根据上述现象可以推出:如果 V_{pp} 在 $610 \sim 636 \text{ mV}$ 之间,电路存在 2 个稳定状态(吸引子):周期轨道和混沌吸引子.事实上,如果施加扰动(例如关闭信号源再迅速打开),可以让电路稳态以一定概率在这 2 个吸引子之间跳转.多吸引子共存是非线性系统中的常见现象.

最后需要说明的是,如果 V_{pp} 保持合适取值,连续降低激励信号的频率,也可以出现类似的分岔和突变现象.

3 理论分析

3.1 数学建模

共模电感的非线性来自磁芯的饱和与磁滞.磁滞现象是众多磁畴运动的整体效应,要精确描述其特性很困难.由于磁滞回线很窄,忽略磁滞,只考虑饱和,发现用 $\Phi = \Phi_0 f\left(\frac{I}{I_0}\right)$ 可以较好地描述 Φ 与 I 的整体关系,如图 10 所示,插图是局部放大图,其中函数

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + \beta z, \quad (4)$$

系数 $I_0 = 4.4 \text{ mA}$, $\Phi_0 = 170.4 \mu\text{Wb}$, $\beta = 0.0007$, $z = \frac{I}{I_0}$ 为无量纲化的电流.注意 $L_0 = \frac{\Phi_0}{I_0} \approx 39 \text{ mH}$ 为小电流时的电感量,略大于元件标称值.

下面基于简化的共模电感模型分析电路.为方便起见,首先进行无量纲化^[14],取 $I_0 = \Phi_0 = C = 1$,因此电压和角频率为

$$U_0 = \sqrt{\frac{\Phi_0 I_0}{C}} = 0.28 \text{ V},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{I_0}{\Phi_0 C}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}} = 1.63 \times 10^3 \text{ rad/s},$$

其中 $1/\omega_0$ 为时间的单位,电阻为

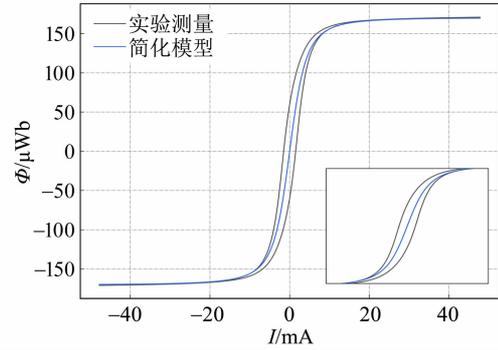


图 10 实验与拟合的磁通量与电流关系

$$R_0 = \sqrt{\frac{\Phi_0}{I_0 C}} = \frac{U_0}{I_0} = 64 \Omega.$$

先分析一次绕组所在的回路.由于 E_1 比绕组的感应电压大 1 个数量级, I_1 的变化量很小,可以看作常量.注意, 2.4 mA 的偏置电流在自然单位下等于 $I_1 = \frac{2.4 \text{ mA}}{I_0} = 0.55$.

对于二次绕组所在的回路,令 $x(t)$ 为 t 时刻电容器两端的电压,则 $\dot{x}(t)$ 为 t 时刻二次绕组回路的电流.由基尔霍夫电压定律可得

$$x + R_2 \dot{x} + \frac{df(\dot{x} + I_1)}{dt} = A \sin(\omega t), \quad (5)$$

其中, A 和 ω 分别为驱动信号的振幅和角频率.自然单位下为 $R_2 = \frac{4.1 \Omega}{R_0} = 0.064$, 750 Hz 的驱动频率相当于 $\omega = \frac{2\pi \times 750 \text{ Hz}}{\omega_0} = 2.88$.

进一步简化,由于 $|\beta| \ll 1$,直接取 $\beta = 0$.定义 $y = f(\dot{x} + I_1)$ 为磁通量,式(5)可改写为

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} - \Delta \\ \dot{y} = A \sin(\omega t) - x - \nu \dot{x} \end{cases}, \quad (6)$$

其中, $\Delta \equiv I_1$, $\nu \equiv R_2$.式(6)即为描述电路的简化微分方程.

3.2 模拟结果及分析

为了与图 5 和表 1 的结果对比,在数值模拟中取 $\Delta = 0.55$, $\omega = 2.88$.考虑到磁滞损耗以及功率放大器的输出阻抗, ν 略微高估为 0.1 , A 为可调整参量.注意与 A 等效的 V_{pp} 表示为

$$V_{pp} = 2AU_0. \quad (7)$$

对式(6)用 4 阶龙格库塔法进行数值积分,可以模拟出与实验观测类似的动力学行为,如图 11 和表 2 所示.为了方便与图 5 对比,图 11 的横纵坐标

分别是 \dot{x} (通过电容器的电流) 和 \dot{y} (绕组的感应电压). 可以看出, 系统从一开始也是经过倍周期分岔进入混沌状态. 而且在混沌带中存在 3, 4, 5,

6, 7... 等周期窗口, 每个周期窗口中可以观察到倍周期分岔; 最后也是通过阵发的形式变成 1 周期轨道.

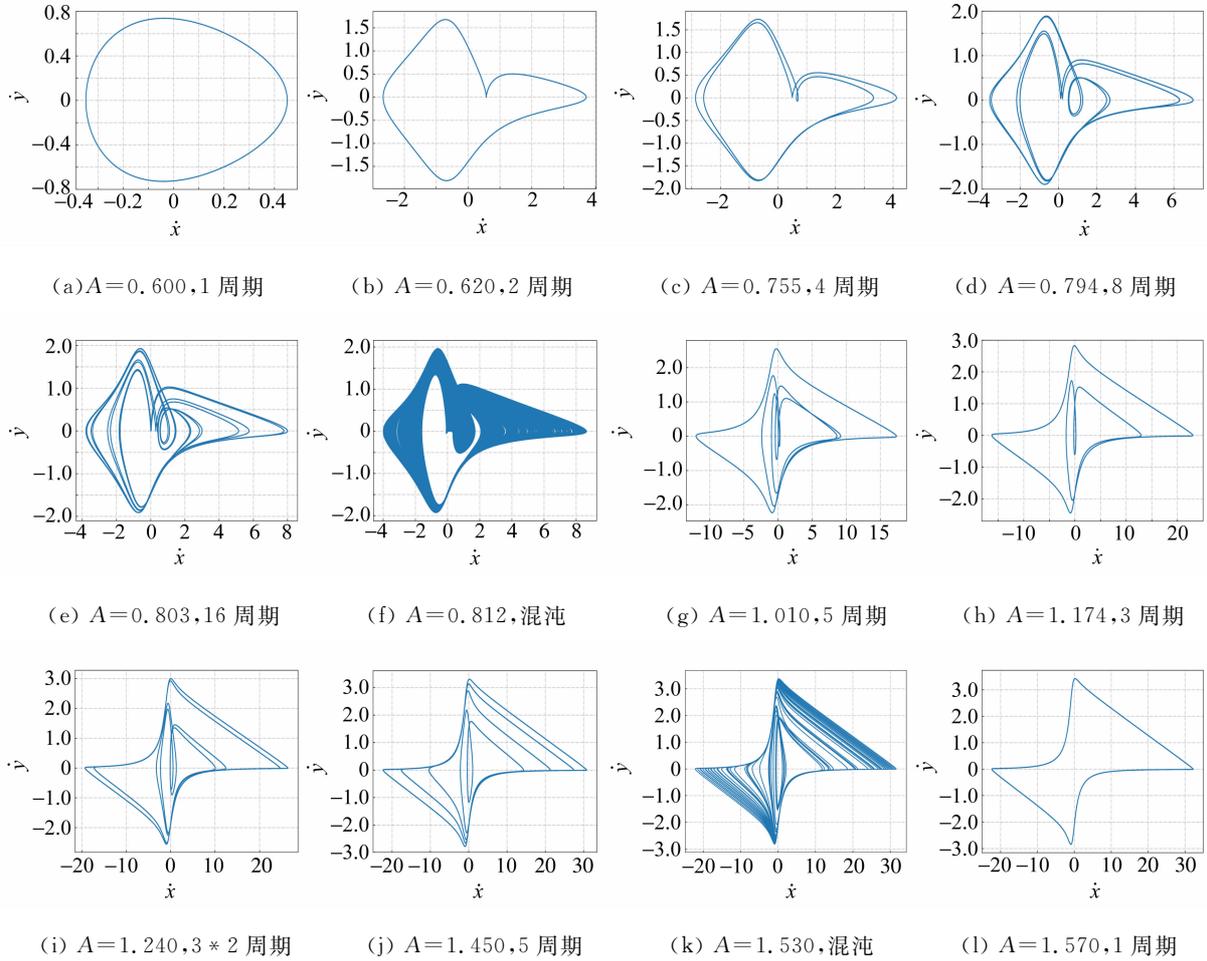


图 11 不同驱动信号幅度下简化模型的轨迹图

表 2 简化模型代表性轨道及特征

周期	A	V _{pp} /mV	特征	周期	A	V _{pp} /mV	特征
1	0.600	336	周期	3	1.174	658	范围较宽的 周期窗口
2	0.620	347	倍周期分岔	3 * 2	1.240	694	
2 * 2	0.755	423		3 * 4	1.244	697	
2 * 4	0.794	445		3 * 8	1.246	698	
2 * 8	0.803	450		4	1.370	767	
混沌	0.812	455	混沌	4 * 2	1.390	778	周期窗口
8	0.920	515	周期窗口	5	1.450	812	
7	0.947	530		6	1.485	832	
7 * 2	0.949	531		7	1.507	844	
5	1.010	566		8	1.520	851	
5 * 2	1.025	574	混沌	混沌	1.530	857	阵发
5 * 4	1.030	577		1	1.570	879	周期

模型与实验最明显的区别是:随着 V_{pp} 增大,模型中的 1 周期轨道经过了 1 次突变(失稳)直接跳到 2 周期轨道,中间并没有发生倍周期分岔. 然后从 2 周期轨道开始,发生了通过倍周期分岔到混沌的转变. 实验上,虽然开始的 2 周期轨道[图 5(b)]和 4 周期轨道[图 5(c)]的形态相差很大,但在连续改变 V_{pp} 的过程中,轨道的形态变化是平滑且可逆的. 另外,对比表 1 和表 2,可以发现模型和实验中相同动力学现象对应的参量值也存在差距. 但是模型可以复现大部分实验中发现的动力学现象. 这表明仅考虑共模电感的饱和行为就可以解释电路的主要非线性动力学行为.

4 结束语

本文对包含非线性电感的混沌电路进行了简化,并根据实测数据对电路进行了简化建模. 实验发现,通过调节激励幅度或频率,该电路可以产生倍周期分岔、混沌带中周期窗口、阵发、激变与多吸引子共存等典型的非线性动力学现象. 而数值仿真也发现忽略磁滞效应的简化模型可以复现大部分实验现象. 该电路结构简单,制作成本低,易于在教学中使用,且动力学现象丰富,教学内容选择自由度大,可以作为大学物理实验中的 RLC 串联谐振电路的自然推广.

参考文献:

[1] Linsay P S. Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator [J]. *Physical Review Letters*, 1981,47(19):1349-1352.

- [2] Chua L O, Wu C W, Huang A, et al. A universal circuit for studying and generating chaos. I. Routes to chaos [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1993,40(10):732-744.
- [3] 包伯成. 混沌电路导论[M]. 北京:科学出版社, 2013:18-21.
- [4] 陈菊芳,华影,于东莹. 文氏桥混沌电路的设计与实验[J]. *物理实验*,2016,36(8):8-12.
- [5] 陈菊芳,徐影,于倩倩. 基于单 T 网络的忆阻混沌电路[J]. *物理实验*,2018,38(6):20-25.
- [6] 丘尚锋,刘通,姚赤芝,等. 基于多涡卷混沌系统的建模研究[J]. *物理实验*,2019,39(7):27-31.
- [7] 黄丽莲,项建弘,王霖郁,等. 非线性变形蔡氏混沌电路实验仪[J]. *物理实验*,2019,39(9):28-32.
- [8] 陈纪华,孙萍,温孝东,等. 非线性 RLC 电路的分频与混沌实验的计算机辅助教学[J]. *物理实验*, 2000,20(12):16-17.
- [9] 李蓉,所广斌. 含磁芯电感的 RLC 电路的分频与混沌实验[J]. *物理与工程*,2005,15(4):29-31.
- [10] 曹惠贤,罗莹,李蓉,等. 普通物理实验[M]. 北京:北京师范大学出版社,2007:302-309.
- [11] 沙振舜,周进,周非. 当代物理实验手册[M]. 南京:南京大学出版社,2012:150-154.
- [12] 郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论[M]. 上海:上海科技教育出版社,1993:20-36.
- [13] Grebogi C, Ott E, Yorke J A. Crisis, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos [J]. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 1983, 7(1):181-200.
- [14] 赵凯华. 定性与半定量物理学[M]. 北京:高等教育出版社,2008:96-100.

Nonlinear dynamics of RLC circuit with common mode choke

SU Ji, BAI Zai-qiao

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: A nonlinear RLC circuit with a common mode choke was proposed, the nonlinearity of the circuit stems was caused by the saturation and hysteresis effects of the choke material. Abundant dynamic behavior such as period doubling, intermittent, crisis and coexistence of multiple attractors could be observed in this circuit by scanning the driven amplitude or frequency. A simplified common mode choke model was established, through which the circuit could be modeled by a second order ordinary differential equation with a periodically driven term if the hysteresis effect was ignored. Numerical simulations showed that the simplified model could produce most experimentally observed dynamical behaviors.

Key words: RLC circuit; common mode choke; nonlinear dynamics [责任编辑:任德香]