文章编号:1005-4642(2023)01-0049-15



摘 要:"迈克耳孙干涉仪与光学自相关测量"是北京大学基础物理实验教学中心开设"综合物理实验"课程中的实 验项目.作为该项目的教学辅助材料,本文旨在引导学生在熟悉教学型迈克耳孙干涉仪及其实验的基础上,尝试理解迈 克耳孙干涉原理在现代科技中的应用,深入研究基于迈克耳孙干涉仪器的光学自相关测量机制,搭建基于教学型迈克耳 孙干涉仪的傅里叶变换光谱仪或者光学相干层析成像的实验系统,探究相关的物理与技术问题.文中插入了一些"思考 与练习"的题目,希望学生能以问题为导向来具体理解相关的物理内容和实验技术.最后的"教学要求"明确了实验的基 本内容、面谈环节重点讨论的具体问题和后续深入研究的主要方向.

19世纪末,迈克耳孙(A. A. Michelson)发 明了用于测量微小长度、折射率和光波波长的干 涉仪器,即迈克耳孙干涉仪,并与莫雷(E.W. Morley)合作,进行了著名的迈克耳孙-莫雷实验 (Michelson-Morley experiment),证明了光速与 地球表面运动速度无关. 该实验引发了一系列的 实验及理论研究,最终否定了当时盛行的以太理 论,确立了光速在真空中不变的基本事实,奠定了 爱因斯坦狭义相对论的实验基础.由于创制了精 密的光学仪器和利用该仪器所完成的光谱学和基 本度量学研究,迈克耳孙于1907年获得了诺贝尔 物理学奖. 此后 100 多年,迈克耳孙的该发明得 到了广泛而深刻的应用和发展,其中迄今最重大 的科学成就是:科学家基于迈克耳孙干涉测量思 想建造了激光干涉引力波天文台(Laser interferometer gravitational-wave observatory, LIGO), 并于 2016 年探测到了爱因斯坦广义相对论预言 的引力波,即黑洞、中子星等天体在碰撞过程中产 生的时空涟漪,其中3位贡献最大的科学家(Rainer Weiss, Kip Stephen Thorne 和 Barry Clark Barish)因此获得了 2017 年的诺贝尔物理学奖.

为狭义相对论和广义相对论提供实验支撑的

装置利用的是迈克耳孙干涉测量微小长度的原理,其基本光路如图1所示.



图 1 迈克耳孙干涉仪的原理光路

电场为 $E_0(t)$ 的准直光波入射干涉仪,经分 束镜(振幅反射率为r和r,透射率为t和t)后,光 波被分成电场为 $rE_0(t)$ 和 $tE_0(t)$ 的反射光束和透 射光束.反射光经反射镜 M_1 反射回来再透过分 束镜到达探测器,其光波电场变为 $trE_0(t)$;透射 光经反射镜 M_2 反射回来再被分束镜反射,相对

收稿日期:2022-09-14;修改日期:2022-11-22

作者简介:张朝晖(1957-),男,陕西杨陵人,北京大学物理学院教授,博士,从事表面物理与扫描探针显微学、超高真空技术、拉曼光谱技术的研究和基础物理实验教学. E-mail:zhangzh@pku.edu.cn

于反射光延迟了时间 τ 后到达探测器,其电场变 为 $\tilde{t}r^{r}E_{0}(t-\tau)$.2 束光波相遇时叠加的光波电场 为 $E(t) = \tilde{r}tE_{0}(t) + \tilde{t}r^{r}E_{0}(t-\tau)$.由波印廷矢量 可知,光强为1个周期内单位时间穿过单位面积 的能量,其表达式为

$$\widetilde{I}(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E(t)|^2.$$
(1)

由于探测器对光波电场的响应时间 T 总是 远远大于光波本身随时间 t 的变化周期,探测器 所探测到的光强实际上是I(t)在时间 T 区间上 的积分平均,即

$$I(\tau) = \frac{\varepsilon_0 c \mid \tilde{r} \tilde{t} \mid^2}{T} \int \mid E_0(t) - E_0(t-\tau) \mid^2 \mathrm{d}t.$$
(2)

式(2)利用了斯托克斯倒逆关系式 $\tilde{r} = -\tilde{r}$.由于稳定入射光波的光强满足 $I(t) = I(t-\tau)$,则式(2)可以写成

$$I(\tau) = 2 \left| \tilde{r} \tilde{t} \right|^2 I_0 \left\{ 1 - \operatorname{Re} \left[\gamma(\tau) \right] \right\}, \qquad (3)$$

其中,*I*₀为入射光波的光强,γ(τ)为入射光波电场的归一化自相关函数,其形式为

$$\gamma(\tau) = \frac{\int E_0(t) E_0^*(t-\tau) dt}{\int E_0(t) E_0^*(t) dt}.$$
 (4)

由此可见,在准直光波入射的条件下,迈克耳孙干 涉仪如同1台模拟计算入射光波自相关函数的机器,通过测量一系列延迟时间所引起的干涉光强, 就可以计算出所有相应的相关函数值.由于延迟 时间 τ 与 2 束光波经历的光程之差 z 及光速 c 之 间满足 τ = z/c,通过测量自相关函数值来反推相 应的时间延迟量就可以确定光程差,即进行微小 长度的测量.对于引力波测量来说,时空涟漪引 起的时空应变及其微小以至于必须能够在10³ km 的尺度上探测到原子核大小光程差改变所引起的 相关函数值的变化.

迈克耳孙干涉仪的自相关测量原理已经发展 成多种检测技术和仪器设备.傅里叶变换光谱仪 (FTS)在原理上就是通过连续移动迈克耳孙干涉 仪的1个平面镜来测量入射光波的自相关信号, 然后对该信号做快速傅里叶变换(FFT),得到入 射光波的频谱分布.另外,光学相干层析(OCT) 的成像技术在原理上则是将迈克耳孙干涉仪的1 个平面镜换成待测样品,运用自相关测量来实现 对生物样品的三维断面成像.

迈克耳孙干涉仪与光学自相关测量实验期望 学生在较高层次上全面理解迈克耳孙干涉仪的光 学自相关测量原理,在较高水平上选择性地完成 综合性的物理实验,如傅里叶变换光谱(FTS)检 测,光学相干层析(OCT) 成像,等等. 作为实验 辅导材料,本文将提供理解和实施项目内容的基 本思路:首先从迈克耳孙干涉仪的基础实验入手, 温习迈克耳孙干涉的物理图像和基本的实验方 法;在此基础上,先尝试理解迈克耳孙干涉仪用于 测量微小长度的原始实验和在引力波测量上的技 术成就,然后进入迈克耳孙干涉仪用于自相关测 量的原理学习,弄清楚 FTS 和 OCT 的实验方法, 形成利用教学型迈克耳孙干涉仪来探究 FTS 和 OCT 的实验方案;最后是教学要求,明确教与学 两方面有效配合的具体方式. 文中插入了一些 "思考与练习"的题目,旨在以问题为导向来加深 学生对相关内容的具体理解.

1 迈克耳孙干涉仪的基础实验

作为教学仪器,迈克耳孙干涉仪可以用来观察各种干涉现象^[1],由于入射干涉仪的光波各种 各样,因此可以通过实验来建立各种干涉类型的 物理图像.在此基础上的干涉测量是通过观察干 涉条纹的分布及变化来推算光程差,对微小长度 的测量精度一般在光波长的量级上.由于实验内 容要求在教学型的迈克耳孙干涉仪上进行,作为 预备实验,学生需要首先熟悉迈克耳孙干涉仪的 结构和调节,以及相关的基础实验.

1.1 仪器结构与调节

物理实验教学普遍使用图 2 所示的迈克耳孙 干涉仪,相较于图 1,图 2 中的分束镜和补偿镜平 行且与反射镜 M_1 移动的导轨方向成 45°角,反射 镜 M_1 和 M_2 的背面均有调节其反射面取向的调 节螺钉,并且反射镜 M_2 的精细调节可以通过拧 动垂直和水平方向拉杆上的螺钉来实现. 3 个地 脚螺钉调节导轨平面与实验台面平行.

转动大转轮带动转轴转动,转轴拖动反射镜 M₁的基座在导轨上平移.反射镜 M₁移动的距 离可由干涉仪侧面 1 mm 精度的直尺以及读数窗 里 0.01 mm 精度的刻度转盘和 0.000 1 mm 精度 的微调转轮共同确定.如果仅单向转动微调转轮 来移动反射镜 M₁,反射镜 M₁移动的距离是上述 3 个读数之和,其精度可达 0.000 1 mm,估读到 0.000 01 mm,即 0.01 μm,因此可以进行可见光 范围(波长 0.4~0.7 μm)的光波干涉测量.由于 从转轮到反射镜有多个环节的机械转换配合,使 用时不可避免地存在较大的回程差.单向转动转 轮是消除回程差的基本方法.



图 2 教学型迈克耳孙干涉仪

实验开始前,需对干涉仪进行基本调节,然后 再依据实验内容,在实验台上围绕干涉仪搭建光 源入射光路和干涉图样观察光路.干涉仪的调节 基准是通过调节3个地脚螺钉使承载反射镜 M₁ 平移的导轨平面平行于实验台面,并用水准仪检 验.后续调节的基本目标是使反射镜 M₁和 M₂ 的反射面分别垂直于导轨平面,M₁反射面的法 线平行于 M₁的平移方向,M₂反射面的法线垂直 于 M₁的平移方向,从而使 M₁和 M₂分别与分束 镜的反射面构成 45°角.实现该调节目标的有效 方法是:激光入射干涉仪,交替调节干涉仪的 2个 反射镜和激光器位置,使投射在反射镜中心的光 斑能原路返回到激光器的出光口,即自准直方法.

思考与练习1:

 1)迈克耳孙干涉仪实现的是分振幅干涉,分 束镜面上镀有的半透半反介质膜是为了获得最大 干涉条纹对比度吗?

2)补偿镜是与分束镜同材质、同厚度、同平行 度和同平整度的平板玻璃.试说明补偿镜在什么 情况下起作用?补偿镜补偿的是什么?这种补偿 效应是如何体现在干涉条纹上的?

3)转动大转轮和微调转轮,观察反射镜 M₁ 的移动,检查毫米直尺、大转轮、微调转轮的示数, 估算回程差的大小,并说明回程差产生的原因. 4)转动大转轮时,微调转轮会跟着转动;转动 微调转轮时,大转轮不会随之转动,分析其中的机 械构造和原理.

1.2 点光源照明的非定域干涉

由2个相干光源出射的光波在空间相遇,若 光程差不超过其相干长度,就会在相遇处干涉,形 成干涉条纹,该现象是典型的非定域干涉.观察 点光源干涉图样的光路示意图如图3所示,反射 镜 M₁和 M₂垂直,氦氖激光经会聚透镜产生点 光源,形成的准球面波入射干涉仪,这样眼睛在观 察屏位置迎着光线看过去就会观察到2个虚的点 光源.当2个虚点光源的连线与观察屏垂直时, 在观察屏上可观察到同心圆环形状的干涉图样. 通过平移反射镜 M₁ 增大光程差时,可观察到 圆环条纹从中心不断吐出;减小光程差时,可观察到 圆环条纹在中心不断被吞入.微调反射镜 M₂,使 其相对于反射镜 M₁的夹角偏离 90°,移动反射镜 M₁的位置,还可以在观察屏上观察到椭圆条纹、 双曲或者直条纹等.



图 3 观察点光源干涉图样的光路示意图

思考与练习2:

1)如果2个相干点光源各自发出理想球面光波,试描绘其非定域干涉在空间形成的干涉图样,并且根据光程差为波长的整数倍标出等光强面的级次.

2)仔细调节干涉仪,并将点光源放置在适当 位置,直到观察到图4所示的干涉图样,画出形成 每个干涉图样的等效干涉光路示意图.

3)利用产生同心圆环干涉图样的光路测量氦 氖激光的波长.如果条纹吞吐的判断误差不超过 0.4个条纹,那么至少应将反射镜 M₁移动多少 距离才能使测得波长的相对误差不超过 0.1%?

4)在图 3 中放置会聚透镜,用准直光波入射

干涉仪,在保持反射镜 M₁和 M₂ 垂直的条件下移动 M₁,观测观察屏上光强的变化情况,并用光 探测器采集数据.思考:如何利用采集到的光强 数据精确校准由干涉仪刻度示数给出的反射镜 M₁的位移?



图 4 非定域干涉的典型干涉图样

1.3 扩展光源照明的定域干涉

在激光聚焦成的点光源 S 前放置毛玻璃,如 图 5 所示. 点光源发出的光束经毛玻璃直接入射 到干涉仪,粗糙毛玻璃上的每个颗粒散射出具有 随机相位的子波,被照明区域的散射光形成具有 随机相位的扩展光源,这时观察屏上有光照但没 有任何干涉图样. 拿走观察屏后,眼睛逆着光照 的方向看过去,可观察到同心圆环状的干涉图样, 并且毛玻璃离点光源 S 越远,即距离干涉仪越近, 扩展光源的面积越大,干涉图样越清晰. 当反射 镜 M1 和 M2 垂直时,眼睛左右、上下小幅度移动 着观察,圆环图样不发生吞吐现象,即为通常所说 的等倾干涉.放置会聚透镜于观察屏位置,可在 透镜后焦面上接收到同心圆环图样.因此,等倾 干涉图样定域在 M₁ 之后的无穷远处. 微调反射 镜 M₂,使其相对于反射镜 M₁ 的夹角偏离 90°,连 续移动 M₁,在此过程中可观察到干涉图样由圆 环条纹变成弯曲条纹再变成直条纹. 用会聚透镜 对观察到的直条纹成像,由物像关系可以确定直 条纹定域在反射镜 M₁ 处. 进一步分析可知, 直 条纹是反射镜 M₁ 和 M₂ 的虚像交汇所成对称劈 尖的等厚干涉条纹. 等倾干涉和等厚干涉均是扩 展光源照明的结果,由于光源扩展,导致形成干涉 图样的条件更为苛刻,即干涉图样只能出现在特 定的区域,故将引起该现象的干涉称之为定域 干涉.



图 5 观察扩展光源干涉图样的光路示意图

普通光源如白炽灯、钠灯、汞灯等都是扩展光 源,用其发出的光直接入射干涉仪也可以实现等 倾和等厚的定域干涉.加上毛玻璃散射,光源的 扩展性会增强,干涉图样的亮度会变得均匀且对 比度也会提高.在图 5 所示的干涉光路中,如果 用汞灯、钠灯取代激光并经滤光片滤光,以准单色 光照射毛玻璃,也可通过干涉仪实现等倾干涉和 等厚干涉.如果用白光照射,可以看到白光等厚 干涉的彩色直条纹,而白光的等倾干涉常因反射 镜面的微弱起伏呈现弯曲的干涉图样.由于普通 光源不像激光那样容易聚焦成点光源,其干涉测 量多用于扩展照明的等倾和等厚干涉.

思考与练习 3:

1)对比图 3 和图 5 所示的激光干涉等效光 路,图 3 是点光源照明的非定域干涉,图 5 是扩展 光源照明的定域干涉,光路上的差别仅仅在于图 5 所示光路多了 1 块具有散射光作用的毛玻璃. 保持反射镜 M₁ 与反射镜 M₂ 垂直,观察 2 种干涉 的圆环图样随光程差改变有无差异,并解释其中 的物理机制. 微调反射镜 M₂,使其相对于反射镜 M₁ 的夹角偏离 90°时,观察 2 种干涉图样随光程 差改变的情况,并解释其原因.

2) 白光如白炽灯,由连续宽谱的光频成分构成波包,波包的空间长度(即相干长度)很短,仅为 1~2 μm,因此白光的干涉条纹只会出现在光程 差为μm量级的干涉图样里.由于光程差非常短,因此白光干涉常被用于确定干涉仪零光程差 时反射镜 M₁的位置.请尝试调出白光的等厚和 等倾干涉条纹,确定从 2 个相反方向移动反射镜 第1期

M₁达到零光程差的位置读数.

3)按图 6 所示光路,先用白光定域干涉方法 调整干涉仪的两臂,使其等光程,且 2 个反射镜面 垂直,然后在反射镜 M₁ 前平行放置厚度为 d 的 平面玻璃板,并改用氦氖激光照明,观察玻璃板后 出现的干涉图样,以及移动 M₁ 时干涉图样的变 化,给 出 测 量 玻璃板 介质 对 氦 氖 激 光 波 长 (633 nm)折射率的实验方法,并尝试用此方法测 量玻璃板对钠光灯、低压汞灯中各谱线的折射率.



图 6 测量平板玻璃折射率的光路示意图

2 迈克耳孙干涉仪的发明及在引力波测量上的应用

从 100 多年前的迈克耳孙-莫雷实验到现今 的引力波探测,迈克耳孙干涉仪的实验成就支撑 着狭义相对论和广义相对论的科学发现. 从应用 的角度来看,其基本原理如图 1 所示,即用单色准 直光波入射迈克耳孙干涉仪,测量干涉场光强微 弱变化对应的微小长度.

2.1 迈克耳孙-莫雷实验

19世纪末的物理学家普遍接受光的电磁波 动学说,但却认为光波应像机械波那样在介质中 传播,猜测这种介质看不见摸不着但应静止地充 满整个空间,并把该介质称为"以太"(Ether).设 想光波在静止的以太参照系中以速度 c 传播,那 么按照经典力学的相对运动原理,在运动的地球 表面坐标系上,实际观测到的应是光波的相对速 度 c',且该速度应与光波在地表的传播方向有关. 迈克耳孙-莫雷实验^[2]的初衷是测量光波在以太 介质中的绝对速度,所用的实验装置为迈克耳孙 干涉仪,如图 7(a)所示:各种光学元件安装在 1 块浮在水银上且可平稳转动的沉重石板上.调整 好的光路如图 7(b)所示:光源 a(钠光灯)发出的 光波被分束镜 b 分成正交出射的透射光束和反射 光束,透射光束经补偿镜 c 和反射镜 d 到达反射 镜 e,然后原路返回到分束镜;反射光束经反射镜 d₁ 到达反射镜 e₁,然后原路返回到分束镜,返回 的 2 束光在分束镜处合成 1 束光进入望远镜 f. 如果按反射成像原理将镜子的反射光路展开,得 到的结果与图 1 描述的光路完全一致,多个反射 镜的作用仅在于分别加大干涉仪两臂的长度.



(a)实验装置



(b)光路示意图图 7 迈克耳孙-莫雷实验装置

考虑图 1 所示的原理光路,设入射单色准直 光波的电场为 $E_0(t) = A(k_0)e^{ik_0(\tilde{z}-\alpha)}$,分束镜的 光强透反比为 1:1,则振幅透/反射率满足 $|\tilde{t}| =$ $|\tilde{r}| = 1/\sqrt{2}$,则由式(3)~(4)可以得到干涉仪输 出的干涉光强为

$$I(z) = I_0 \sin^2\left(\frac{k_0 z}{2}\right),\tag{5}$$

这也是图 7 中望远镜可以看到的光强,其中 z 为 光波经过干涉仪两臂的光程差.根据迈克耳孙-莫雷实验,干涉仪的两臂长 *l* 和 *l'*大致相等,并且 放置干涉仪的 1 个臂平行于地表运动速度 *v*,则 在该臂上光波来回所需时间为<u>*l*</u>+<u>*l*</u>,另一

臂垂直于地表运动速度,其光波来回所需时间为 $\frac{2l'}{\sqrt{c^2-v^2}}$,因光速不同引入的光程差为 z = $\frac{2lc^2}{c^2-v^2} - \frac{2l'c}{\sqrt{c^2-v^2}} \approx \frac{lv^2}{c^2}$. 如果平稳转动干涉仪直 到 90°,两臂的光程差会由 $\frac{lv^2}{c^2}$ 变成 $-\frac{lv^2}{c^2}$, 对应于 式(5)所示的光强会有连续的变化过程,其最大的 变化量由 $z = \frac{2lv^2}{r^2}$ 决定. 若反射镜 e 与反射镜 e₁ 偏离正交小角度,则在转动过程中可通过望远镜 f 观察到干涉条纹的平移,最大的平移量也由 z= $\frac{2lv^2}{c^2}$ 决定.由式(5)知道,光程差的变化为半个波 长时,干涉场的光强会发生最大程度的亮暗翻转 变化,对于直条纹来说,亮条纹会移动到相邻的暗 纹处. 地球自转和公转引起的地面速度v≈3× 10^4 m/s, 光速 $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, 钠光灯波长 $\lambda \approx$ 5.9×10⁻⁷ m,则由 $\frac{2lv^2}{c^2} = \frac{\lambda}{2}$ 估算得到 $l \approx 15$ m,亦 即干涉仪的臂长设置在 15 m 附近时可以引起 0.5个条纹移动的光强变化,当年的迈克耳孙干 涉仪臂长为11 m,以同样的估算可以得到条纹的 移动量约为 0.4 个条纹,因此能被显著观测到. 然而,实际情况却是通过反复实验均未观察到所 期待的条纹移动,因此称其为"零结果",即条纹本 身不会移动,该结果促使研究者重新审视物理学 的基本问题,奠定了爱因斯坦狭义相对论关于光 速不变性原理的实验基础.

2.2 LIGO 的迈克耳孙干涉仪

1916年,即广义相对论场方程形成的第2 年,爱因斯坦预言了引力波的存在,他发现线性化 的弱场方程具有波动解:由震源质量四极矩的时 间变化产生以光速传播的空间应变横波,即引力 波,只是引力波的振幅会非常小.同年,施瓦兹希 尔德(Schwarzschild)发表了场方程的黑洞解. 1963年,科尔(Kerr)将黑洞解推广到旋转黑洞. 此后的理论研究形成了二元黑洞合并的模型和引 力波的精确预测.

探测引力波的实验始于 20 世纪 60 年代的共 振质量探测器.干涉型探测器最早是在 20 世纪 60 年代初到 70 年代被提出,进入 21 世纪后,建 造的各种干涉型探测器形成了全球网络.2015 年,LIGO 成为首台开始观测的干涉型探测器,并 首次直接观测到瞬态引力波信号,该信号在 35~250 Hz 的频率范围内向上扫描,峰值引力波应变为1.0×10⁻²¹,其与广义相对论预测的1 对黑洞的激发、合并以及由此产生单个黑洞的衰减振荡波形相匹配,证实了高扰动黑洞非线性动力学的广义相对论.

由胡克定律的相关实验可知,材料的应变定 义为 $\epsilon = \delta L/L$,是一维情况下长度 L 的相对改变 量.同理,引力波应变是时空涟漪引起空间几何 上的相对改变.在引力波经过干涉仪的过程中, 空间在某方向上收缩伴随与其垂直方向上延伸, 反之亦然.由 $\epsilon = 1.0 \times 10^{-21}$ 可知,要想如同迈克 耳孙-莫雷实验预期测得 0.4 个条纹的变化,用迈 克耳孙干涉仪测量引力波的臂长需长达 10⁹ km, 该长度超过了地球到太阳的距离(1.5 × 10⁸ km), 显然无法做到.

图 8 是 LIGO 的迈克耳孙干涉仪的示意图, 从其直观构造来看,值得引人关注的是:

1) 正交的两臂各包含 1 个长为 L=4 km 的 法布里-珀罗腔, 二者在引力波中的腔长分别为 L_x 和 L_y . 准直入射的 Nd: YAG 激光(波长为 1 064 nm)在腔中经过 b=300 次反射后, 形成的 光程差为 $z=2b(L_x-L_y)$.

2)输入端的功率回收镜在整个干涉仪中提供 了额外的激光共振增强,使得 20 W 的激光输入 增加到 700 W,再入射到分束器.



图 8 LIGO 迈克耳孙干涉仪实验装置示意图^[3]

其中,法布里-珀罗腔的作用与迈克耳孙-莫 雷实验中置入的多个反射镜作用类似,是为了更 大限度地加大光程,放大极其微小的空间应变产 生的光程差 δz. 同时,腔的长度 L 提供了测量空 间应变 h(t)的尺度,将 δz 与 h(t)联系起来,即

从原理上看,LIGO 的干涉强度可由式(5)计 算,但是实际形成的光程差 $\delta z \approx 2.4 \times 10^{-6}$ nm, 此微小量显然靠式(5)无法测得.值得庆幸的是 光的量子理论提供了强大的光子计数测量方法, 建立起了干涉仪输出光子数 N 的概率分布与入 射到干涉仪的光子数 N₀ 的概率分布之间的统计 关系,得到了二者的统计均值 N 和 $\overline{N_0}$ 之间满足 与式(5)相似的关系^[4],即

$$\overline{N} = \overline{N_0} \sin^2\left(\frac{k_0 z}{2}\right), \tag{6}$$

并且输出光子数 N 的统计方差正好等于其均值 \overline{N} ,则光子计数的标准差,即不确定度为

$$\sqrt{N} = \sqrt{N_0} \sin\left(\frac{k_0 z}{2}\right). \tag{7}$$

由式(6)可知,当光程差 z 变化时,探测到的光子 数 \overline{N} 随之变化.对式(6)微分,即可得到对应于空 间应变 h(t)的光子均值变化为

 $\delta \overline{N} = \overline{N_0} k b L \sin(k_0 z) \cdot h(t).$ (8) 令式(7)和式(8)相等,可以得到可测的最小空间 应变为

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi b L \cos\left(\frac{k_0 z}{2}\right) \sqrt{N_0}},\tag{9}$$

其中,探测时间 T 内输入干涉仪的光子数均值 $\overline{N_0}$ 等于光强为 I_0 的入射光波在探测时间 T 的输入 能量与单个光子能量 $\hbar \omega$ 的比值,即 $\overline{N_0} = \frac{TI_0}{\hbar \omega}$. 另 外,设无引力波状态的干涉仪光程差 $z \approx 0$,则 $\cos\left(\frac{k_0 z}{2}\right) \approx 1$,代入式(9)可得

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi b L} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{TI_0}}, \qquad (10)$$

可见,大功率的入射光强可提高引力波探测的灵 敏度.另外,将T理解为探测器的采样周期,则T 与待测引力波的最高频率 $f_{\rm M}$ 应该满足采样定 理,即T $\leqslant \frac{1}{2f_{\rm M}}$.取 $f_{\rm M}$ =500,则T=1ms,即采 样频率为1kHz.将文献[3]给出的参量b=300, L=4×10³m, I_0 =700W和 λ =1064 nm代入式 (10),得到 $h_{\rm min}$ ≈3.3×10⁻²³.因此,如此配置的 LIGO干涉仪可以探测到空间应变在10⁻²¹量级 上的引力波.

LIGO 是用其干涉仪内置的法布里-珀罗腔

来精确感应和度量应力波的空间应变,因此腔体 反射镜的位置不确定度 Δx 必须得到有效控制, 使其小于 Lh_{min} .由于反射镜位置不确定度 Δx 与 其动量不确定度 Δp 必须满足测不准关系,即 $\Delta x \cdot \Delta p \ge \hbar$,而 Δp 可由测量时间 T 内的位置不 确定度估计为 $\Delta p = \frac{m\Delta x}{T}$,则 $\Delta x \ge \sqrt{\frac{T\hbar}{m}}$.因此, 要保确 10^{-23} 量级的灵敏度,就必须给反射镜配置 足够大的质量 m,使得 $h_{min} \ge \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T\hbar}{m}}$,则在同样 的参量条件下反射镜的质量 $m \ge 100$ kg.这与物 理学的基本常识一致,即惯性质量越大的物体,其 位置更不容易改变.

由式(10)可以看出,入射干涉仪的光强 I。越 大,引力波探测的灵敏度越高.因此,LIGO采用 大功率的激光照明,并在输入端配置功率回收镜, 可以使得照明功率进一步增大. 这里同时需要考 虑大功率激光照明的负面影响,即强光对反射镜 施加的辐射压力(光压),使得光压对反射镜位置 影响的不确定度小于引力波探测的设定灵敏度. 由前面的分析已知,T时间探测到光子数 $\overline{N} = \frac{TI_0}{\hbar \omega}$ 的不确定度为 \sqrt{N} ,则光子弹性反射过程中转移 给反射镜动量的均值为 $p=2\hbar bk_0 \overline{N}$,不确定度为 $\Delta p = 2\hbar k_0 b \sqrt{N}$.因此,不确定的动量引起反射镜 位置的不确定量为 $\Delta x = 2T\hbar k_0 b \frac{\sqrt{N}}{m}$,令其小于 Lh_{\min} ,得到 $I_0 \leqslant \frac{mc^2}{4\omega b^2 T^2}$. 代入前面的参量得到 $I_0 \leq 1.0 \times 10^5$ W. 这意味着 LIGO 可以通过提高 激光功率进一步提升引力波的探测灵敏度,如将 1.0×10^5 W 代入式(10),得到 $h_{\min} = 2.8 \times 10^{-25}$.

3 基于迈克耳孙干涉仪的傅里叶变换光 谱检测

与广泛应用于可见光波段光谱检测的光栅光 谱仪相比,傅里叶变换光谱仪广泛应用于红外,特 别是中远红外波段光谱的检测,这是因为在中远 红外波段,傅里叶变换光谱仪的光谱分辨率更高, 光谱探测范围更大,并且技术上也更容易实现^[2]. 在可见光波段,采用大面积全息光栅分光和大规 模阵列光电探测器摄谱,使得光栅光谱仪因其快 捷高效和高分辨而被广泛应用.也正是因为涉及 的高科技元素,光栅光谱仪具有技术复杂性和高 成本的特点.相比之下,傅里叶变换光谱仪的结 构简单,在原理上就是带有计算机数据采集和处 理的迈克耳孙干涉仪^[5].将傅里叶变换光谱仪在 中远红外波段的优势引入到可见光波段,是值得 关注的课题.

3.1 基本原理

如图 9 所示的迈克耳孙干涉仪光路,准直光 波入射,出射干涉光波经会聚透镜聚焦在光电探 测器上,探测器接收到的光强存入电脑并在其屏 幕上显示.



图 9 傅里叶变换光谱测量的原理光路

入射的准直光波是所含各种频率平面光波的 线性叠加,其电场可以表示为

$$E_0(\tilde{z},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(k\tilde{z}-\omega t)} dk, \qquad (11)$$

其中 k,ω,A 分别为所含光频成分的波矢、角频率 和复振幅,ž为光程.将式(11)代入式(4),用 z 表 示光波经过干涉仪两臂的光程差,整理后得到

$$\gamma(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 e^{ikz} dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 dk}, \qquad (12)$$

$$\gamma^{*}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |A(-k)|^{2} e^{ikz} dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^{2} dk}.$$
 (13)

因此得到

$$\operatorname{Re}\left[\gamma(z)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{A^2(k)} e^{ikz} dk, \qquad (14)$$

其中, A²(k) 为归一化光谱强度的密度函数, 其表达式为

$$\overline{A^{2}(k)} = \frac{|A(k)|^{2} + |A(-k)|^{2}}{2 \int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^{2} dk}.$$
 (15)

由式(14)可知,Re [$\gamma(z)$]是以归一化光谱强度为 权重的所有余弦函数的线性叠加.由于仅在 z=0处,不同周期的余弦函数才会同相位叠加,因此 Re [$\gamma(z)$]仅在 z=0 附近区域不为零.基于光波 自相关函数的定义,该不为零区域有效宽度的一 半为光波波包的长度,即相干长度.

对式(14)求平均得到 $\overline{\gamma(z)} = 0$,则由式(3)可得 $\overline{I(z)} = \frac{1}{2}I_0$,因此式(3)可写成

$$\operatorname{Re}\left[\gamma(z)\right] = \frac{\overline{I(z)} - I(z)}{\overline{I(z)}} , \qquad (16)$$

式(16)表明,可以通过实验测量 *I*(*z*)得到波包长度,亦即光波的相干长度.对式(14)和式(16)分别做傅里叶变换,得到

$$\overline{A^{2}(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{I(z)} - I(z)}{\overline{I(z)}} e^{-ikz} dz, \quad (17)$$

其中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\overline{A^2(k)} = \mathscr{F}\left\{\frac{\overline{I(z)} - I(z)}{\overline{I(z)}}\right\}$. 因此,利 用测得的光强数据做傅里叶变换即可得到归一化 的光谱强度分布 $\overline{A^2(k)}$.

思考与练习4:

1)考虑氦氖激光($\lambda_0 = 633 \text{ nm}$)准直入射迈克 耳孙干涉仪,设定 $|A(k)|^2 = \delta(k - k_0), 求$ Re $[\gamma(z)].$

2)考虑低压汞灯黄光(双线: $\lambda_1 = 576.96$ nm, $\lambda_2 = 579.07$ nm)准直入射迈克耳孙干涉仪,设定 $|A(k)|^2 = \delta(k - k_1) + \delta(k - k_2)$,求 Re [$\gamma(z)$], 并作图说明其特征.

3)考虑高压汞灯黄光(双线: $\lambda_1 = 576.96 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 579.07 \text{ nm}$)准直入射迈克耳孙干涉仪.由于 灯管内汞原子气体的气压高,汞原子间碰撞会使 得汞原子发光的谱线显著增宽,增宽的谱线分布 为洛伦兹函数 $f(k) = \frac{\alpha}{\pi(c^2k^2 + \alpha^2)}$,其中 α 为半高 半宽, c 为光速,则高压汞灯的黄光光谱分布为 $|A(k)|^2 = [\delta(k - k_1) + \delta(k - k_2)] * f(k)$,求 Re $[\gamma(z)]$,并作图说明其特征.

3.2 实验技术

依据式(17)可知,通过傅里叶变换计算入射 光波光谱强度A²(k)的核心问题是如何精确测量 随着光程差 z 变化的出射光波干涉光强 I(z).光 程差 z 的改变是通过移动反射镜 M₁ 来实现,一 系列的光强测量数据要求在远小于光波长的尺度 上精确确定反射镜 M₁ 的位移.转动迈克耳孙干 涉仪上的转轮(见图 2)可以平稳地移动反射镜 M_1 ,但是仪器上的读数不能满足所要求的定位精 度,并且手动的读数效率难以完成大量的数据采 集.解决该问题的通用做法是:与待测准直光波 并行入射用于光程差校准的准直激光,如图 10 所 示,用1个探测器测量激光的干涉光强 $I_c(z)$,用 另1个探测器测量待测光波的干涉光强 I(z),用 2个探测器同步采集各自的光强信号.由式(5) 知道, $I_c(z)$ 是关于 kz/2 的正弦平方信号,故可以 利用测得的 $I_c(z)$ 系列数据反推出与 I(z)共同对 应的 z 系列数据.因此,无论用手转动仪器上的 转轮还是电机驱动,只要保持 M_1 反射镜沿着单 方向移动,就可以在半波长的精度上准确获得所 测 I(z)对应的光程差 z,从而为式(17)的傅里叶 变换计算提供准确的测量数据.



图 10 傅里叶变换光谱测量的应用光路

在教学型迈克耳孙干涉仪上进行上述测量的 优化方法所对应的光路示意图如图 10 所示,构造 入射光模块和接收光模块,与干涉仪组合,搭建成 傅里叶变换光谱系统.激光和待测光波聚焦到各 自的入射孔,2个探测器经 A/D 模数转换电路接 到计算机.用电机驱动或者用手转动干涉仪上的 转轮,通过计算机记录 I_e(z)和 I(z)的序列数据. 最后,利用 I_e(z)的测量数据反推光程差 z,即可 完成实验的测量部分.

思考练习5:

1) 写出利用 $I_{e}(z)$ 的测量数据反推 $I_{e}(z)$ 和I(z) 共同对应光程差 z 的具体算法. 能否在数据 采集过程中实时完成该算法? 2)在采集数据的过程中保持反射镜 M₁ 的单 方向平移很重要,想想这是为什么?

3)尝试按图 10 所示的光路搭建实验系统,测量白光、低压汞灯、高压汞灯的干涉光强数据,并确定每个干涉光强数据所对应的光程差.

3.3 计算方法

式(17)定义的傅里叶变换需要转换成离散求 和的形式来进行,这里涉及到2个基本问题:a.如 何用有限数量的离散函数值表征无限个连续函数 值所包含的信息;b.如何高效计算大量数据求和 的离散傅里叶变换.前者要满足抽样定理的要 求,后者要靠快速傅里叶变换^[6]来完成.为了方 便且不失一般性,考虑如下形式傅里叶变换的离 散化问题

$$\mathscr{F}{f(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx, \qquad (18)$$

其中 $k = 1/\lambda$. 这里具体使用的函数是 $f(x) = e^{-x^2}$ 和其傅里叶变换 $\mathcal{F}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\pi k^2}$.

f(x)的函数图形如图 11(a)所示,使其离散 化就是其本身乘以图 11(b)所示的采样函数,即 $\Delta(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\Delta x), 其中 \delta(x) = \begin{cases} 1, x=0\\ 0, x\neq 0 \end{cases}$ Δx 为采样间隔.为了将无限区间的积分变为有限区间的求和,需要乘以图 11(c)所示的窗函数,

即
$$h(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \\ 0, x \notin \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \end{cases}$$
, 得到离散函数

 $f_0(x) = f(x)\Delta(x)h(x)$,如图11(d)所示,其仅在 箭头所指的位置取函数 f(x)的值.

为了获得离散化的傅里叶变换,还需将函数 $f_0(x)$ 周期化.这里需引入以窗函数宽度 L 为空 间周期的 δ 序列函数 $\nabla(x) = L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nL)$, 并与 $f_0(x)$ 做卷积运算,得到 $\tilde{f}(x) = \nabla(x) *$ $[f(x)\Delta(x)h(x)]$,其函数图形如图 12(a)所示. 对所构造的周期性函数 $\tilde{f}(x)$ 做傅里叶变换,即 $\tilde{F}(k) = \mathcal{F}{\tilde{f}(x)}$,则有

$$\widetilde{F}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \frac{n}{L}\right) \cdot G(k) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \frac{n}{\Delta x}\right),$$
(19)

其中 $G(k) = \mathcal{F}{f(x)} * \mathcal{F}{h(x)}$. 在 L 足够大的 条件下, $\mathcal{F}{h(x)} \approx \delta(x)$,因此 $G(k) \approx \mathcal{F}{f(x)}$. 这样, $G(k) * \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \frac{n}{\Delta x}\right)\right] 以 \frac{1}{\Delta x}$ 为周期呈现 $F(k) = \mathscr{F}[f(x)]$,然后乘上以 $\frac{1}{L}$ 为空间周期的 δ 序列函数,最终形成离散化的 $\tilde{F}(k)$,其函数图 像如图 12(b)所示.







(b)采样函数 ∆(x)图像



图 11 连续函数的离散化

对比图 12(a)和图 12(b)可以发现,对原函数 f(x)离散化处理的 2 个参量直接影响傅里叶变换的结果:截断长度 L 大,则傅里叶变换的谱分辨高; Δx 小,对原函数细节的分辨高,傅里叶变换的谱周期 1/ Δx 大,相邻周期的重叠少,高频谱的结果更准确. 但是,大的 L 和小的 Δx 会导致计算量较大.若 $\mathcal{F}{f(x)}$ 存在最高空间频率,即截止波数 k_{\max} (截止波长 λ_{\min}),则在采样间隔 Δx 满 足采样定理 $\left(\Delta x \leqslant \frac{1}{2k_{\max}} = \frac{\lambda_{\min}}{2}\right)$ 的条件下,傅里叶变换的高频成分才是严格准确的.因此,在准备实验数据时,应明确数据间隔是否小于待测光谱

范围最小波长的 1/2;实验数据的长度 L 与需要 分辨的波数 Δk 是否满足 $1/L \leq \Delta k$.



按照上述的离散化处理,离散的周期性函数 $\tilde{f}(x) = \nabla(x) * [f(x)\Delta(x)h(x)]$ 与其傅里叶变 换 $\tilde{F}(k) = \mathcal{F}\{\nabla(x) * [f(x)\Delta(x)h(x)]\}$ 在1个 周期里的采样点数目总相等.设定从原点开始从 左到右的1个周期里,等间距编号0,1,2,..., N-1,采样 N个数值,则有

正变换: $\widetilde{F}\left(\frac{n}{L}\right) = \sum_{m=0}^{N-1} \widetilde{f}(m\Delta x) e^{-2\pi i mm/N}$, (20)

逆变换: $\tilde{f}(m\Delta x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{F}\left(\frac{n}{L}\right) e^{2\pi i n m/N}$, (21)

其中 m,n=0,1,…,N-1.式(20)~(21)即为 离散傅里叶变换的求和形式.由于用于傅里叶变 换的数据量通常很大,直接求和的计算效率太低, 因此一般采用快速傅里叶变换,即FFT.在数据 处理的编程过程中,只需掌握调用FFT 函数的方 法即可,不必了解其具体的算法.

思考与练习 6:

1)考虑高压汞灯黄光双线(双线: λ_1 = 576.96 nm, λ_2 = 579.07 nm)的傅里叶变换光谱 测量,确定光强测量数据所对应光程差的最小值 和采样间隔的最大值.

2)式(17)的傅里叶变换积分定义在对称的积 分区间上,而式(20)及式(21)定义的离散傅里叶 变换却是在正向单边区域求和.如何理解二者之 间的差异,并做何种处理才能获得待测光谱的强 度分布<u>A²(k)</u>? 3)光强测量数据的白噪声会如何影响光谱测量的最小分辨?周期性的相位和振幅噪声会给光 谱测量带来什么影响?

4 基于迈克耳孙干涉仪的光学相干层析 成像

宽谱光源发出光波的相干长度很小,例如白 光的相干长度只有几 um,这类光源称为低相干 光源,其光波的干涉称为低相干干涉.利用迈克 耳孙干涉仪实现低相干干涉,只能在很小的光程 差范围内看到干涉图样.如图 13 所示,将迈克耳 孙干涉仪的反射镜 M_2 换成待测样品 M_2' ,则来 自样品不同深度层面的反射光波分别与来自反射 镜 M₁ 的光波干涉,得到样品不同深度层面的干 涉信号. 基于该思想,原位实时探测生命活体组 织结构技术即光学相干层析(OCT)断面成像技 术于上世纪八九十年代得到了较大发展[7].结合 光纤、电子及计算机等高新技术,OCT 已成为用 于眼科检查和内窥镜原位活检的高端仪器. 作为 教学实验,近年来出现了一些初步的探索性工 作[8-10],但在层析成像的水平上还有诸多工作要 做.本文围绕自由空间的迈克耳孙干涉仪,论述 OCT 层析成像的物理机制和基本实验方法,引导 学生探究层析成像的理论与技术问题.



图 13 自由空间光学相干层析原理光路

4.1 时域光学相干层析

时域光学相干层析是指在图 13 所示光路中, 通过移动反射镜 M₁ 使其反射光波与样品 M₂'不 同深度界面反射的物光发生低相干干涉,通过测 量在探测器上的干涉光强随光程差改变的序列信 号来解析样品各个层面的位置及其振幅反射率.

考虑图 13 的原理光路和其中所示的层状样

品,入射在分束镜上的准直光波 $E_0(\tilde{z},t)$ 具有式 (11)的表示形式,经分束镜后分成反射光束和透 射光束,分束镜的正反向振幅反射率和透射率分 别为(\tilde{r},\tilde{r})和(\tilde{t},\tilde{t}').反射光束经 M_1 反射,透过 分束镜,到达探测器的光波电场为 $\tilde{r}tE_0(\tilde{z}_1,t)$,其 中 \tilde{z}_1 是此光波经历的光程;透射光束直接入射到 层状样品的表面上,其光波电场为 $\tilde{t}E_0(\tilde{z}_0,t)$,其 中 \tilde{z}_0 是此光波到达物面时的光程.设层状样品内 部有折射率依次为 n_1, n_2, \dots, n_N 的薄层,层厚依 次为 $\Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_N$.对于入射到样品的光波, 设样品表面及层间界面的振幅反射率依次为 r_0 , r_1, r_2, \dots, r_N ,相应的振幅透射率依次为 t_0, t_1 , t_2, \dots, t_N ,反向的振幅透射率为 $t_0', t_1', t_2', \dots, t_N'$.忽略二次反射(即图 13 中向右的反射),则第 m界面对波矢为k的入射光波的振幅反射率为

$$\alpha_m^k = \widetilde{r_m} e^{i2kl_m} , \qquad (22)$$

其中 $m=0,1,2,\dots,N; l_m = \sum_{s=1}^m n_s \Delta \tilde{z}_s$. 当 m=0, $\tilde{r}_0 = r_0; m > 0, \tilde{r}_m = t_0 t_0' \cdot t_1 t_1' \cdot t_2 t_2' \cdots t_{m-1} t_{m-1}' \cdot t_m \cdot a_m^k$ 调制式(11)所示准直光波中的波矢成分,使 出射样品表面的光波经分束镜反射后,到达探测器 上的电场为 \tilde{r} $\tilde{t} \sum_{m=0}^N \tilde{r}_m \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i[k(\tilde{z}+2l_m)-\alpha]} dk$,其中 \tilde{z} 为经样品表面反射的光波到达探测器的总光程,则探测器上来自干涉仪两臂光波的叠加电场为

$$E(\tilde{z},z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)B(z,k)e^{i(k\tilde{z}-\omega t)}dk, \quad (23)$$

其中

$$B(z,k) = \tilde{r} \tilde{t} \tilde{r}_{s} e^{ikz} + \tilde{r'} \tilde{t} \sum_{m=0}^{N} \tilde{r_{m}} e^{i2kl_{m}}, \quad (24)$$

其中, \tilde{r}_s 为反射镜 M₁的振幅反射率, $z = \tilde{z_1} - \tilde{z}$ 为 经平面镜 M₁ 反射的光波相对于样品表面反射光 波的光程差.依据光强定义,探测器探测到的光 强应为 $I(\tilde{z},z) = \frac{\varepsilon_0 c}{2T} \int |E(\tilde{z},z,t)|^2 dt$,由此得到 $I(z) = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 |B(z,k)|^2 dk.$ (25)

利用式(12) ~ (13)、斯托克斯倒逆关系 $\tilde{r} = -\tilde{r}'$ 和分束镜1:1的分光特性($|\tilde{r}| = |\tilde{t}| = 1/\sqrt{2}$), 整理得到

$$I(z) = \overline{I(z)} - \frac{1}{2} I_0 \sum_{m=0}^{N} \widetilde{r_s} \widetilde{r_m} \operatorname{Re} \left[\gamma(z) \right] \star \delta(z - 2l_m),$$
(26)

其中, $\overline{I(z)}$ 为I(z)的平均值, I_0 为入射干涉仪的 光波强度, $\gamma(z)$ 为入射光波自相关函数.由式 (26)可以看出,样品中每个界面反射出来的低相 干光波只会与反射镜 M_1 反射且在 $z = 2l_m$ 附近时 的低相干光波发生干涉,呈现峰值为 $\tilde{r_s}, \tilde{r_m}$ 的干涉 光强信号 $\gamma(z)$,这样即可获得样品表面和内部各 层的位置坐标和振幅反射率.由式(4)和式 (12)~(13)可知, $\gamma(z)$ 为偶函数,在z = 0处的 模值最大.低相干照明光波的光谱范围宽,则光 波相干长度很小,亦即 $\gamma(z)$ 的非零区域很小.这 样,随着反射镜 M_1 的移动,就可以在随光程差改 变的 I(z)曲线上,互不干扰地显示出层间距大于 $\gamma(z)$ 区间宽度的反射层位置和反射光强度.

思考与练习7:

1) 设 $A(k) = \begin{cases} A_0, k \in [k_1, k_2] \\ 0, k \notin [k_1, k_2] \end{cases}$, 试 求 $E_0(\tilde{z}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(k\tilde{z}-\alpha t)} dk$ 的自相关函数 $\gamma(z)$

$$\begin{split} E_{0}(\tilde{z},t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(k\tilde{z}-\omega t)} dk \ \mathfrak{h} \ \mathfrak{h}$$

2) 如果图 13 中的层状物是厚度为 0.2 mm, 折射率为 1.50 的平板玻璃,前后面的振幅反射率 均为 0.05,反射镜 M_1 的振幅反射率 $\tilde{r_s} = 1$,入射 光波与题 1) 相同. 试按式(26) 确定 $\overline{I(z) - I(z)}$ $I_0/2$ 随光程差 z 变化的函数关系及其图像.

 3) 如由题 1) 所述的低相干光波入射,以 Re [γ(z)] 的半高全宽为最小分辨尺寸,试利用 式(26) 讨论可以分辨的待测物层间距.

4.2 频域光学相干层析

在图 13 所示的光路中,频域光学相干层析与 时域光学相干层析不同的是反射镜 M₁ 保持在确 定的位置不动,用光谱仪取代光探测器来接收干 涉的光强信号.

如图 14 所示,把式(23) 表示的准直光波聚焦 到光栅光谱仪的入射狭缝,经谱仪内部的凹面反 射镜再换成准直光波,并且以入射面与光栅栅线 垂直的方式斜入射到光栅上.光栅以反射的方式 将入射的准直光波按波长衍射成不同方向的单色 准直光波,随后的另一凹面反射镜将不同方向的 单色准直光波聚焦到谱仪的谱面上,并用放置在 谱面上的探测器接收光谱的光强.



图 14 光栅光谱仪的光学傅里叶变换原理光路

根据夫琅禾费衍射,谱面上的光场可表示为 光栅表面反射光场的光学傅里叶变换.取光栅平 面的法线为Z轴,光栅栅线方向为Y轴,则垂直于 光栅栅线方向为X轴,XZ平面为准直光波的入 射面.以θ角入射的准直光波在光栅面(x,y)光 场的每个波矢 k 分量均增加相位因子 e^{ikrsinθ}.因 此,由式(23)得到投射在光栅上的光场为

$$E(\tilde{z}, z, x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) B(z, k) e^{i(k\tilde{z} - \omega t)} e^{ikx \sin \theta} dk,$$
(27)

其中, \tilde{z} 为图 13 中经样品表面反射光波的光程,z为反射镜 M₁反射的光波相对于物表面反射光波的光程差. 设光栅的振幅反射率为 $\tilde{r_g}(x)$,光栅被照明的区域为 H(x,y),则光栅表面的反射光场 在谱面(\tilde{x}, \tilde{y})的夫琅禾费衍射为^[11]

$$G(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, z_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tilde{z}, z, x, t) H(x, y) \cdot \tilde{r}_g(x) \exp\left\{-ik\left[\left(\frac{\tilde{x}}{f}\right)x + \left(\frac{\tilde{y}}{f}\right)y\right]\right\} dxdy, \quad (28)$$

其中, f 为聚焦凹面镜的焦距. 设光栅的矩形衍
射区域的长和宽分别为 2L_x 和 2L_y, 在照明区域
H(x, y) = 1,其他区域为零. 光栅的振幅反射率
是关于 x 的周期性函数,展成傅里叶级数为

$$\widetilde{r_{g}}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mk_{0}x},$$

其中 $k_0 = 1/d, d$ 为光栅常量. 这样可以得到

$$G(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, z, t) = 4L_x L_y \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)B(z, k) e^{i(k\tilde{z}-\omega t)} \delta\left(\tilde{x} - \frac{fk_0 m + fk\sin\theta}{k}\right) \delta(\tilde{y}) dk, \quad (29)$$

(31)

其中利用了 sinc *x*≈δ(*x*).由于通常的光栅光谱 仪只采集1级光谱,因此谱面上的光强为

$$I(z,k) = \frac{1}{2} c_{\varepsilon_0} S |a_1|^2 |A(k)|^2 |B(z,k)|^2, \quad (30)$$

其中, $k = \frac{k_0}{\tilde{x}/f - \sin \theta}$ 可确定波矢为 k 的光谱强度

处在谱面上的位置 \tilde{x} , $S=4L_xL_y$ 为光栅上衍射区 域的面积.事先设定干涉仪中平面反射镜 M_1 的 位置 $z=z_0$,则 $I(z_0,k)$ 的数据完全由光谱仪给 出.对式(30)两边做傅里叶逆变换,并利用式 (12)~(13)和式(24)的关系,可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(z_{0},k) e^{ikz} dk = I_{0}S | a_{1} |^{2} \Big\{ | \tilde{r} \tilde{r}_{s} \tilde{t} |^{2} + | \tilde{t} \tilde{r}' |^{2} \sum_{m=0}^{N} | \tilde{r_{m}} |^{2} \Big\} \gamma(z) \star \delta(z) + \\ I_{0}S | a_{1} |^{2} | \tilde{t} \tilde{r}' |^{2} \sum_{\substack{m,m'=0\\m\neq m'}}^{N} \tilde{r_{m}} \tilde{r_{m'}} \gamma(z) \star \delta[z + 2(l_{m} - l_{m'})] + \\ I_{0}S | a_{1} |^{2} | \tilde{t} |^{2} \tilde{r} \tilde{r}' \tilde{r}_{s} \sum_{m=0}^{N} \tilde{r_{m}} \gamma(z) \star \{\delta[z + (z_{0} - 2l_{m})] + \delta[z - (z_{0} - 2l_{m})]\},$$

其中, $r_m \gamma(z) * \delta(z-z_m)$ 中的 $r_m n z_m$ 分别表示样 品内各层的反射强弱及其位置深度,因此该因子 包含了样品的待测信息.不难看出,等式右边第1 项显示样品的所有待测信息在 z=0 处叠加,不可 分辨;第 2 项包含的待测信息分布在区域 $-2l_M < z < 2l_M$,各层信息相互重叠,不便分离,其中 l_M 为待测样品的有效深度;第 3 项包含的样品层状 信息按 $z=\pm[z_0-2l_m]$ 分布在 $z < z_0$ 和 $z > -z_0$ 的区域.为了使第 3 项与第 2 项不重叠,选定的 $|z_0|$ 应适当大一些,使得可以有效分离出第 3 项, 得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(z_0, k) e^{ikz} dk \propto \beta \sum_{m=0}^{N} \tilde{r}_m \gamma(z) * \left\{ \delta [z + (z_0 - 2l_m)] + \delta [z - (z_0 - 2l_m)] \right\}, \quad (32)$$

其中 $\beta = I_0 S |a_1|^2 |\tilde{t}|^2 \tilde{rrrs}$.如此利用式(30)对 光谱仪测得的光谱强度数据做傅里叶逆变换,从 中获得 $\tilde{rmr}(z) * \delta(z-z_m)$ 关于所有*m*的数值,从 而获得待测样品的层状结构信息.利用这些数 据,借助于图像处理的技术就可以构建待测样品 的层状结构图像.

思考与练习8:

1)按文中的定义 $z_0 = \tilde{z_1} - \tilde{z_2}$ 为反射镜 M_1 在 某个位置时反射的光波相对于物表面反射光波的 光程差,其取值可正可负. 试分析式(32),分别给 出当 $z_0 > 0$ 和 $z_0 < 0$ 时,式(32)所包含待测物信 息的分布区域.

2)如果待测物是思考与练习7题2)中的玻璃片,试给出式(32)所示的待测物信息分布.如果是若干个这样的玻璃片叠在一起,分析式(32) 所示的待测物信息分布.

4.3 光学相干层析的实验方法

由于实际待测样品的复杂性,层状反射的分 析仅在样品纵深方向周围微小区域近似成立,因 此,实际的光学相干层析测量需要使用显微物镜 将准直光聚焦到样品表面. 然而,聚焦的结果导 致层状反射的分析局限在物镜景深的范围内,并 且聚焦点越小,景深范围也越小.为了兼顾较大 的层析深度,OCT 一般采用数值孔径较小的物 镜. 当物镜将光波聚焦到样品上一点时,可以通 过时域或频域 OCT 的数据采集,得到该点在纵 深方向上成像的样品信息,即"A-扫描". 要获得 样品的三维成像信息,还需要进行"B-扫描",即在 横向的二维区域逐点进行 A-扫描. 时域 OCT 的 A-扫描是通过移动反射镜 M₁ 来实现的,而频域 OCT 只需要将反射镜 M₁ 设置在固定的位置,仅 做 B-扫描即可, A-扫描的信息从光谱仪采集的光 谱数据中提取.这样,频域 OCT 比时域 OCT 的 效率更高,应用也更为广泛.

图 15 所示为基于教学型迈克耳孙干涉仪的 OCT 实验原理光路. 值得注意的是,物镜对平行 光束的聚焦实际上是将平行光变换为以聚焦点为 束腰的高斯光束,束腰的尺寸对应于聚焦点的大 小,能够决定 OCT 成像的横向分辨. 按照高斯光 束的理论,束腰截面上各点的波矢平行,离开束腰 截面朝两边各移动 $z_{\rm R} = \pi \omega_0^2 / \lambda$ 的距离,其间的波 矢与束腰上的波矢近似平行,因此 OCT 探测的 成像深度为 $2z_{\rm R}$. 显然,数值孔径大的物镜引起束 腰小的高斯光束,导致浅的成像深度,而选择短的 照明光波可以扩大层析深度.

由式(26)和式(32)已经知道,OCT 在深度方

向上的最小分辨尺度仅取决于光源的自相关函数 $\gamma(z)$ 的半高全宽(FWHM),亦即取决于光源的谱 强度分布函数 $|A(k)|^2$.选用宽谱的低相干光源, 使得 $\gamma(z)$ 的半高全宽远小于成像深度,是发展 OCT 成像技术的基本方面.





思考与练习 9:

 利用图 15 所示的光路,尝试分别用时域和 频域的光学干涉层析成像方法,实现思考与练习
 8 中题 2)所述问题的实验测量.

2)尝试利用实验测得的 $\tilde{r_m}\gamma(z) * \delta(z-z_m)$ 数据,构建玻璃片堆的层状结构成像.

5 教学要求

5.1 实验内容

利用实验室配备的实验装置:教学型迈克耳 孙干涉仪、光源、光探测器、数据采集系统、光谱 仪、光学镜片、层状样品等,选做下面 2 个内容中 的 1 个:

1)搭建傅里叶变换光谱采集系统,完成对卤 素灯、高压汞灯及低压汞灯的自相关函数检测,并 通过快速傅里叶变换完成各光源发光谱的计算.

2) 搭建光学相干层析实验系统,用盖玻片制备层状样品,用卤素灯为低相干光源,完成对自制层状样品断面的时域和频域 OCT 检测,并进一步探讨 OCT 断面成像的理论与技术问题.

5.2 面谈讨论

关于搭建傅里叶变换光谱检测装置的问题:

1)实验者分别展示测得激光与卤素灯准直 光,以及激光与高压汞灯准直光经过干涉仪出射 的2对并行干涉光强曲线,讨论实验中可能存在 的问题.

2)实验者展示对测得光强数据做离散傅里叶

变换的结果,分析反射镜 M₁的非匀速移动对光 谱测量的影响,讨论利用激光的干涉光强特征,校 准反射镜 M₁ 非线性移动的数据处理方法.

3)实验者展示用氦氖激光的干涉光强对反射 镜移动做线性化校准后,卤素灯和高压汞灯的干 涉光强数据和离散傅里叶变换后的结果,讨论自 组傅里叶变换光谱仪的光谱分辨能力、影响因素 及改进措施.

关于搭建光学干涉层析成像装置的问题:

1)实验者展示测得激光与卤素灯光经过干涉 仪出射的并行干涉光强曲线、卤素灯的自相关函 数曲线和用光谱仪测得卤素灯的光谱分布,讨论 实验中可能存在的问题.

2)实验者展示测得自制层状样品的单点时域 和频域 OCT 干涉曲线(A-扫描),分析样品各层 的位置及振幅反射率,讨论干涉信号的强度和信 噪比问题.

3)实验者展示测得自制层状样品在1条线上 多个单点的时域和频域 OCT 干涉曲线和综合各 点信息构建的断面像,讨论在 A-扫描基础上进行 B-扫描的技术问题及断面像构建的算法问题.

5.3 口头报告和论文报告

关于口头报告和论文报告,建议在以下方面 做深入或扩展研究:

1)依据实验数据,探讨光谱测量精度、光谱分 辨能力及信噪比等问题.

2)直接在自组傅里叶变换光谱仪的光路上加 吸收样品,研究样品的吸收问题.

3) 自制层状样品, 探讨 OCT 测量和断面成 像的理论与技术问题.

6 结束语

迈克耳孙干涉仪是大学物理实验或普通物理 实验课程普遍开设的实验项目,其实验目的为引 导学生在掌握仪器调节的基础上,观察和探究各 种光的干涉现象,学习和体验干涉计量的技术和 方法.在此基础上,开设"迈克耳孙干涉仪与光学 自相关测量"的综合实验,将迈克耳孙干涉仪与光学 自相关测量"的综合实验,将迈克耳孙干涉仪的原 理深化到光学自相关测量,以此引导学生探究迈 克耳孙干涉仪的原理在前沿科技的应用,在更高 的层次和更广的领域将基础物理实验同前沿科技 相联系,开展科研模式的专题研究.长期以来,我 校坚持以科研引领实验教学的理念,推动物理实 验的教学改革和团队建设,探索研究型物理实验 教学的课程模式,形成了"基础"与"创新"协同发 展的基础物理实验课程体系^[12-13].其中"综合物 理实验"课程开设了一系列专题性的实验项目,激 励学生以科研模式开展自主、开放、综合的实验研 究."迈克耳孙干涉仪与光学自相关测量"是该系 列专题研究项目之一.本文梳理了基于迈克耳孙 干涉仪原理的若干重要的光学自相关测量问题, 仅作为展开综合实验的背景材料,供学生参考.

参考文献:

- [1] 吕斯骅,段家低,张朝晖. 新编基础物理实验[M]. 北京:高等教育出版社,2013:252-262,410-418.
- [2] 钟锡华.现代光学基础[M].北京:北京大学出版 社,2003:177-197.
- [3] Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger [J], Physical Review Letters, 2016, 116(6):061102.
- [4] Loudon R. 光的量子理论[M]. 于良,等译. 北京: 高等教育出版社,1992:281-286.

- [5] 周文远,刘艳格,田建国,等. 教学用自组式傅里叶 变换光谱仪[J]. 大学物理,2002,21(10):18-20.
- [6] Brigham E O. 快速傅里叶变换[M]. 柳群,译. 上 海:上海科学技术出版社,1979:100-121.
- [7] Drexler W, Fujimoto J G. Optical coherence tomography [M]. Berlin: Springer, 2008:1-72.
- [8] 韩荣磊,李佼洋,韩涛,等. 时域光学干涉层析成像 实验系统的研制[J]. 物理实验,2018,38(7):26-30.
- [9] 韩涛,王福娟,李佼洋,等. 频域光学干涉层析成像 实验系统的研制[J]. 物理实验,2018,38(8):21-26.
- [10] 董君行,赵伟鸿,邓梓彬,等.光学低相干干涉频域 信号的探测和分析[J].物理实验,2022,42(8):1-7.
- [11] 张朝晖,刘国超. 阿贝成像原理和空间滤波实验 [J]. 物理实验,2017,37(9):23-30.
- [12] 李智,张朝晖. 以"科研引领实验教学"理念,推动 物理实验教学改革和团队建设[J]. 物理实验, 2018,38(3):24-27.
- [13] 张朝晖. 发展研究型基础物理实验教学的理念与 实践[J]. 物理实验,2021,41(7):41-45.

Michelson interferometer and optical autocorrelation measurement

ZHANG Zhaohui

(Teaching Center for Experimental Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Michelson interferometer and optical autocorrelation measurement was an experimental project in the course of comprehensive physics experiment offered by the Teaching Center for Experimental Physics of Peking University. As an auxiliary teaching material of the project, this paper aimed to guide students try to understand the application of Michelson interferometer principle in modern science and technology on the basic of understanding the teaching-typed Michelson interferometer and its basic experiments. Then the students could deeply study the optical autocorrelation measurement mechanism of Michelson interferometry, and built an experimental system of Fourier transform spectrometer or optical coherence tomography based on the Michelson interferometer, as well explore the relevant physical and technical issues. Some "thinking and practice" questions were inserted in this paper, hoping that students could take them as the guidance to specifically understand the relevant physical content and experimental techniques. Finally, the "teaching requirements" clarified the basic contents of the experiment, the specific issues to be discussed in the interview and the main directions for further investigation.

Key words: comprehensive physical experiment; Michelson interferometer; optical autocorrelation measurement; gravitational wave measurement; Fourier transform spectral detection; optical coherence tomography [责任编辑:郭 伟]