文章编号:1005-4642(2023)01-0049-15



迈克耳孙干涉仪与光学自相关测量

张朝晖

(北京大学 物理学院 基础物理实验教学中心,北京 100871)

摘 要:"迈克耳孙干涉仪与光学自相关测量"是北京大学基础物理实验教学中心开设"综合物理实验"课程中的实验项目. 作为该项目的教学辅助材料,本文旨在引导学生在熟悉教学型迈克耳孙干涉仪及其实验的基础上,尝试理解迈克耳孙干涉原理在现代科技中的应用,深入研究基于迈克耳孙干涉仪器的光学自相关测量机制,搭建基于教学型迈克耳孙干涉仪的傅里叶变换光谱仪或者光学相干层析成像的实验系统,探究相关的物理与技术问题. 文中插入了一些"思考与练习"的题目,希望学生能以问题为导向来具体理解相关的物理内容和实验技术. 最后的"教学要求"明确了实验的基本内容、面谈环节重点讨论的具体问题和后续深入研究的主要方向.

关键词:综合物理实验;迈克耳孙干涉仪;光学自相关测量;引力波测量;傅里叶变换光谱检测;光学相干层析成像中图分类号 S:O436.1 文献标识码:A DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2023.01.009

19世纪末,迈克耳孙(A. A. Michelson)发 明了用于测量微小长度、折射率和光波波长的干 涉仪器,即迈克耳孙干涉仪,并与莫雷(E.W. Morley)合作,进行了著名的迈克耳孙-莫雷实验 (Michelson-Morley experiment),证明了光速与 地球表面运动速度无关. 该实验引发了一系列的 实验及理论研究,最终否定了当时盛行的以太理 论,确立了光速在真空中不变的基本事实,奠定了 爱因斯坦狭义相对论的实验基础. 由于创制了精 密的光学仪器和利用该仪器所完成的光谱学和基 本度量学研究,迈克耳孙于1907年获得了诺贝尔 物理学奖. 此后 100 多年,迈克耳孙的该发明得 到了广泛而深刻的应用和发展,其中迄今最重大 的科学成就是:科学家基于迈克耳孙干涉测量思 想建造了激光干涉引力波天文台(Laser interferometer gravitational-wave observatory, LIGO), 并于 2016 年探测到了爱因斯坦广义相对论预言 的引力波,即黑洞、中子星等天体在碰撞过程中产 生的时空涟漪,其中 3 位贡献最大的科学家(Rainer Weiss, Kip Stephen Thorne 和 Barry Clark Barish) 因此获得了 2017 年的诺贝尔物理学奖.

为狭义相对论和广义相对论提供实验支撑的

装置利用的是迈克耳孙干涉测量微小长度的原理,其基本光路如图 1 所示.

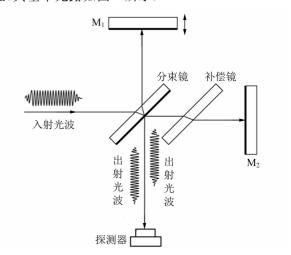


图 1 迈克耳孙干涉仪的原理光路

电场为 $E_0(t)$ 的准直光波入射干涉仪,经分束镜(振幅反射率为 \tilde{r} 和 \tilde{r} ,透射率为 \tilde{t} 和 \tilde{t})后,光波被分成电场为 $\tilde{r}E_0(t)$ 和 $\tilde{t}E_0(t)$ 的反射光束和透射光束. 反射光经反射镜 M_1 反射回来再透过分束镜到达探测器,其光波电场变为 \tilde{t} $\tilde{r}E_0(t)$;透射光经反射镜 M_2 反射回来再被分束镜反射,相对

于反射光延迟了时间 τ 后到达探测器,其电场变为 $\tilde{t}r^2E_0(t-\tau)$. 2 束光波相遇时叠加的光波电场为 $E(t)=\tilde{r}tE_0(t)+\tilde{t}r^2E_0(t-\tau)$. 由波印廷矢量可知,光强为 1 个周期内单位时间穿过单位面积的能量,其表达式为

$$\widetilde{I}(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E(t)|^2.$$
 (1)

由于探测器对光波电场的响应时间 T 总是远远大于光波本身随时间 t 的变化周期,探测器所探测到的光强实际上是 $\tilde{I}(t)$ 在时间 T 区间上的积分平均,即

$$I(\tau) = \frac{\varepsilon_0 c \mid \widetilde{r} \mid \widetilde{t} \mid^2}{T} \int \mid E_0(t) - E_0(t - \tau) \mid^2 dt.$$

式(2)利用了斯托克斯倒逆关系式 $\tilde{r} = -\tilde{r}$. 由于稳定入射光波的光强满足 $I(t) = I(t-\tau)$,则式(2)可以写成

$$I(\tau) = 2 |\widetilde{r}\widetilde{t}|^2 I_0 \left\{ 1 - \operatorname{Re} \left[\gamma(\tau) \right] \right\},$$
 (3)

其中, I_0 为入射光波的光强, $\gamma(\tau)$ 为入射光波电场的归一化自相关函数,其形式为

$$\gamma(\tau) = \frac{\int E_0(t) E_0^* (t - \tau) dt}{\int E_0(t) E_0^* (t) dt}.$$
 (4)

由此可见,在准直光波入射的条件下,迈克耳孙干涉仪如同 1 台模拟计算入射光波自相关函数的机器,通过测量一系列延迟时间所引起的干涉光强,就可以计算出所有相应的相关函数值.由于延迟时间 τ 与 2 束光波经历的光程之差 z 及光速 c 之间满足 $\tau = z/c$,通过测量自相关函数值来反推相应的时间延迟量就可以确定光程差,即进行微小长度的测量.对于引力波测量来说,时空涟漪引起的时空应变及其微小以至于必须能够在 10^8 km的尺度上探测到原子核大小光程差改变所引起的相关函数值的变化.

迈克耳孙干涉仪的自相关测量原理已经发展成多种检测技术和仪器设备. 傅里叶变换光谱仪(FTS)在原理上就是通过连续移动迈克耳孙干涉仪的1个平面镜来测量入射光波的自相关信号,然后对该信号做快速傅里叶变换(FFT),得到入射光波的频谱分布. 另外,光学相干层析(OCT)的成像技术在原理上则是将迈克耳孙干涉仪的1个平面镜换成待测样品,运用自相关测量来实现

对生物样品的三维断面成像.

迈克耳孙干涉仪与光学自相关测量实验期望 学生在较高层次上全面理解迈克耳孙干涉仪的光 学自相关测量原理,在较高水平上选择性地完成 综合性的物理实验,如傅里叶变换光谱(FTS)检 测,光学相干层析(OCT)成像,等等. 作为实验 辅导材料,本文将提供理解和实施项目内容的基 本思路:首先从迈克耳孙干涉仪的基础实验入手, 温习迈克耳孙干涉的物理图像和基本的实验方 法;在此基础上,先尝试理解迈克耳孙干涉仪用于 测量微小长度的原始实验和在引力波测量上的技 术成就,然后进入迈克耳孙干涉仪用于自相关测 量的原理学习,弄清楚 FTS 和 OCT 的实验方法, 形成利用教学型迈克耳孙干涉仪来探究 FTS 和 OCT的实验方案;最后是教学要求,明确教与学 两方面有效配合的具体方式. 文中插入了一些 "思考与练习"的题目,旨在以问题为导向来加深 学生对相关内容的具体理解.

1 迈克耳孙干涉仪的基础实验

作为教学仪器,迈克耳孙干涉仪可以用来观察各种干涉现象^[1],由于入射干涉仪的光波各种各样,因此可以通过实验来建立各种干涉类型的物理图像.在此基础上的干涉测量是通过观察干涉条纹的分布及变化来推算光程差,对微小长度的测量精度一般在光波长的量级上.由于实验内容要求在教学型的迈克耳孙干涉仪上进行,作为预备实验,学生需要首先熟悉迈克耳孙干涉仪的结构和调节,以及相关的基础实验.

1.1 仪器结构与调节

物理实验教学普遍使用图 2 所示的迈克耳孙干涉仪,相较于图 1,图 2 中的分束镜和补偿镜平行且与反射镜 M_1 移动的导轨方向成 45° 角,反射镜 M_1 和 M_2 的背面均有调节其反射面取向的调节螺钉,并且反射镜 M_2 的精细调节可以通过拧动垂直和水平方向拉杆上的螺钉来实现. 3 个地脚螺钉调节导轨平面与实验台面平行.

转动大转轮带动转轴转动,转轴拖动反射镜 M_1 的基座在导轨上平移. 反射镜 M_1 移动的距离可由干涉仪侧面 1 mm 精度的直尺以及读数窗里 0.01 mm 精度的刻度转盘和 0.000 1 mm 精度的微调转轮共同确定. 如果仅单向转动微调转轮来移动反射镜 M_1 ,反射镜 M_1 移动的距离是上述

3 个读数之和,其精度可达 0.000~1~mm,估读到 0.000~01~mm,即 $0.01~\mu\text{m}$,因此可以进行可见光 范围(波长 $0.4\sim0.7~\mu\text{m}$)的光波干涉测量.由于 从转轮到反射镜有多个环节的机械转换配合,使用时不可避免地存在较大的回程差.单向转动转轮是消除回程差的基本方法.

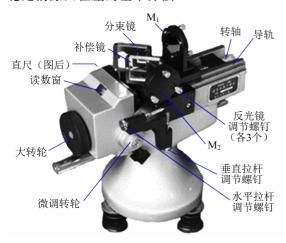


图 2 教学型迈克耳孙干涉仪

实验开始前,需对干涉仪进行基本调节,然后 再依据实验内容,在实验台上围绕干涉仪搭建光 源入射光路和干涉图样观察光路. 干涉仪的调节 基准是通过调节 3 个地脚螺钉使承载反射镜 M_1 平移的导轨平面平行于实验台面,并用水准仪检 验. 后续调节的基本目标是使反射镜 M_1 和 M_2 的反射面分别垂直于导轨平面, M_1 反射面的法 线平行于 M_1 的平移方向, M_2 反射面的法线垂直 于 M_1 的平移方向,从而使 M_1 和 M_2 分别与分束 镜的反射面构成 45° 角. 实现该调节目标的有效 方法是:激光入射干涉仪,交替调节干涉仪的 2 个 反射镜和激光器位置,使投射在反射镜中心的光 斑能原路返回到激光器的出光口,即自准直方法.

思考与练习1:

- 1) 迈克耳孙干涉仪实现的是分振幅干涉,分束镜面上镀有的半透半反介质膜是为了获得最大干涉条纹对比度吗?
- 2)补偿镜是与分束镜同材质、同厚度、同平行度和同平整度的平板玻璃. 试说明补偿镜在什么情况下起作用? 补偿镜补偿的是什么? 这种补偿效应是如何体现在干涉条纹上的?
- 3)转动大转轮和微调转轮,观察反射镜 M_1 的移动,检查毫米直尺、大转轮、微调转轮的示数,估算回程差的大小,并说明回程差产生的原因.

4)转动大转轮时,微调转轮会跟着转动;转动 微调转轮时,大转轮不会随之转动,分析其中的机 械构造和原理.

1.2 点光源照明的非定域干涉

由 2 个相干光源出射的光波在空间相遇,若光程差不超过其相干长度,就会在相遇处干涉,形成干涉条纹,该现象是典型的非定域干涉.观察点光源干涉图样的光路示意图如图 3 所示,反射镜 M₁ 和 M₂ 垂直,氦氖激光经会聚透镜产生点光源,形成的准球面波入射干涉仪,这样眼睛在观察屏位置迎着光线看过去就会观察到 2 个虚的点光源.当 2 个虚点光源的连线与观察屏垂直时,在观察屏上可观察到同心圆环形状的干涉图样.通过平移反射镜 M₁ 增大光程差时,可观察到圆环条纹从中心不断吐出;减小光程差时,可观察到圆环条纹从中心不断吐出;减小光程差时,可观察到圆环条纹从中心不断吐出;减小光程差时,可观察到圆环条纹在中心不断被吞入.微调反射镜 M₂,使其相对于反射镜 M₁ 的夹角偏离 90°,移动反射镜 M₁ 的位置,还可以在观察屏上观察到椭圆条纹、双曲或者直条纹等.

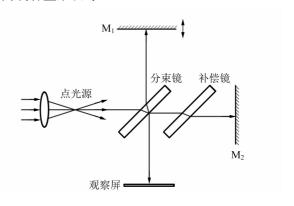


图 3 观察点光源干涉图样的光路示意图

思考与练习2:

- 1)如果2个相干点光源各自发出理想球面光波,试描绘其非定域干涉在空间形成的干涉图样,并且根据光程差为波长的整数倍标出等光强面的级次.
- 2)仔细调节干涉仪,并将点光源放置在适当位置,直到观察到图 4 所示的干涉图样,画出形成每个干涉图样的等效干涉光路示意图.
- 3)利用产生同心圆环干涉图样的光路测量氦 氖激光的波长. 如果条纹吞吐的判断误差不超过 0.4 个条纹,那么至少应将反射镜 M_1 移动多少距离才能使测得波长的相对误差不超过 0.1%?
 - 4)在图 3 中放置会聚透镜,用准直光波入射

干涉仪,在保持反射镜 M_1 和 M_2 垂直的条件下移动 M_1 ,观测观察屏上光强的变化情况,并用光探测器采集数据. 思考:如何利用采集到的光强数据精确校准由干涉仪刻度示数给出的反射镜 M_1 的位移?

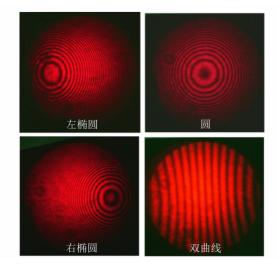


图 4 非定域干涉的典型干涉图样

1.3 扩展光源照明的定域干涉

在激光聚焦成的点光源 S 前放置毛玻璃,如 图 5 所示, 点光源发出的光束经毛玻璃直接入射 到干涉仪,粗糙毛玻璃上的每个颗粒散射出具有 随机相位的子波,被照明区域的散射光形成具有 随机相位的扩展光源,这时观察屏上有光照但没 有任何干涉图样. 拿走观察屏后,眼睛逆着光照 的方向看过去,可观察到同心圆环状的干涉图样, 并且毛玻璃离点光源 S 越远,即距离干涉仪越近, 扩展光源的面积越大,干涉图样越清晰. 当反射 镜 M₁ 和 M₂ 垂直时,眼睛左右、上下小幅度移动 着观察,圆环图样不发生吞吐现象,即为通常所说 的等倾干涉. 放置会聚透镜于观察屏位置,可在 透镜后焦面上接收到同心圆环图样. 因此,等倾 干涉图样定域在 M₁ 之后的无穷远处. 微调反射 镜 M_2 ,使其相对于反射镜 M_1 的夹角偏离 90°,连 续移动 M1,在此过程中可观察到干涉图样由圆 环条纹变成弯曲条纹再变成直条纹. 用会聚透镜 对观察到的直条纹成像,由物像关系可以确定直 条纹定域在反射镜 M₁ 处. 进一步分析可知,直 条纹是反射镜 M1 和 M2 的虚像交汇所成对称劈 尖的等厚干涉条纹. 等倾干涉和等厚干涉均是扩 展光源照明的结果,由于光源扩展,导致形成干涉 图样的条件更为苛刻,即干涉图样只能出现在特 定的区域,故将引起该现象的干涉称之为定域干涉.

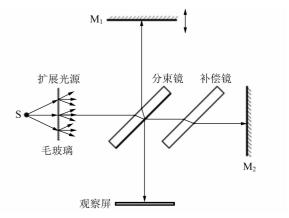


图 5 观察扩展光源干涉图样的光路示意图

普通光源如白炽灯、钠灯、汞灯等都是扩展光源,用其发出的光直接入射干涉仪也可以实现等倾和等厚的定域干涉.加上毛玻璃散射,光源的扩展性会增强,干涉图样的亮度会变得均匀且对比度也会提高.在图 5 所示的干涉光路中,如果用汞灯、钠灯取代激光并经滤光片滤光,以准单色光照射毛玻璃,也可通过干涉仪实现等倾干涉和等厚干涉.如果用白光照射,可以看到白光等厚干涉的彩色直条纹,而白光的等倾干涉常因反射镜面的微弱起伏呈现弯曲的干涉图样.由于普通光源不像激光那样容易聚焦成点光源,其干涉测量多用于扩展照明的等倾和等厚干涉.

思考与练习3:

1)对比图 3 和图 5 所示的激光干涉等效光路,图 3 是点光源照明的非定域干涉,图 5 是扩展光源照明的定域干涉,光路上的差别仅仅在于图 5 所示光路多了 1 块具有散射光作用的毛玻璃.保持反射镜 M_1 与反射镜 M_2 垂直,观察 2 种干涉的圆环图样随光程差改变有无差异,并解释其中的物理机制.微调反射镜 M_2 ,使其相对于反射镜 M_1 的夹角偏离 90°时,观察 2 种干涉图样随光程差改变的情况,并解释其原因.

2) 白光如白炽灯,由连续宽谱的光频成分构成波包,波包的空间长度(即相干长度)很短,仅为 $1\sim2~\mu m$,因此白光的干涉条纹只会出现在光程差为 μm 量级的干涉图样里.由于光程差非常短,因此白光干涉常被用于确定干涉仪零光程差时反射镜 M_1 的位置.请尝试调出白光的等厚和等倾干涉条纹,确定从2个相反方向移动反射镜

M₁ 达到零光程差的位置读数.

3) 按图 6 所示光路, 先用白光定域干涉方法调整干涉仪的两臂, 使其等光程, 且 2 个反射镜面垂直, 然后在反射镜 M_1 前平行放置厚度为 d 的平面玻璃板, 并改用氦氖激光照明, 观察玻璃板后出现的干涉图样, 以及移动 M_1 时干涉图样的变化, 给出测量玻璃板介质对氦氖激光波长(633 nm)折射率的实验方法, 并尝试用此方法测量玻璃板对钠光灯、低压汞灯中各谱线的折射率.

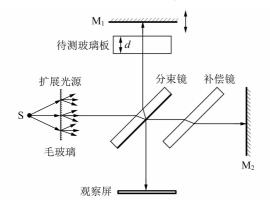


图 6 测量平板玻璃折射率的光路示意图

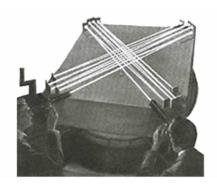
2 迈克耳孙干涉仪的发明及在引力波测量上的应用

从 100 多年前的迈克耳孙-莫雷实验到现今的引力波探测,迈克耳孙干涉仪的实验成就支撑着狭义相对论和广义相对论的科学发现. 从应用的角度来看,其基本原理如图 1 所示,即用单色准直光波入射迈克耳孙干涉仪,测量干涉场光强微弱变化对应的微小长度.

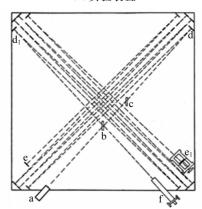
2.1 迈克耳孙-莫雷实验

19世纪末的物理学家普遍接受光的电磁波动学说,但却认为光波应像机械波那样在介质中传播,猜测这种介质看不见摸不着但应静止地充满整个空间,并把该介质称为"以太"(Ether).设想光波在静止的以太参照系中以速度 c 传播,那么按照经典力学的相对运动原理,在运动的地球表面坐标系上,实际观测到的应是光波的相对速度 c',且该速度应与光波在地表的传播方向有关.迈克耳孙-莫雷实验[2]的初衷是测量光波在以太介质中的绝对速度,所用的实验装置为迈克耳孙干涉仪,如图 7(a)所示:各种光学元件安装在1块浮在水银上且可平稳转动的沉重石板上.调整好的光路如图 7(b)所示:光源 a(钠光灯)发出的

光波被分束镜 b 分成正交出射的透射光束和反射 光束,透射光束经补偿镜 c 和反射镜 d 到达反射 镜 e,然后原路返回到分束镜;反射光束经反射镜 d₁ 到达反射镜 e₁,然后原路返回到分束镜,返回 的 2 束光在分束镜处合成 1 束光进入望远镜 f. 如果按反射成像原理将镜子的反射光路展开,得 到的结果与图 1 描述的光路完全一致,多个反射 镜的作用仅在于分别加大干涉仪两臂的长度.



(a)实验装置



(b)光路示意图 图 7 迈克耳孙-莫雷实验装置

考虑图 1 所示的原理光路,设入射单色准直光波的电场为 $E_0(t) = A(k_0) e^{ik_0(\tilde{z}-a)}$,分束镜的光强透反比为 1:1,则振幅透/反射率满足 $|\tilde{t}| = |\tilde{r}| = 1/\sqrt{2}$,则由式(3)~(4)可以得到干涉仪输出的干涉光强为

$$I(z) = I_0 \sin^2\left(\frac{k_0 z}{2}\right),\tag{5}$$

这也是图 7 中望远镜可以看到的光强,其中 z 为 光波经过干涉仪两臂的光程差. 根据迈克耳孙- 莫雷实验,干涉仪的两臂长 l 和 l' 大致相等,并且 放置干涉仪的 1 个臂平行于地表运动速度 v,则 在该臂上光波来回所需时间为 $\frac{l}{l-v}$ + $\frac{l}{l+v}$. 另一

臂垂直于地表运动速度,其光波来回所需时间为 $\frac{2l'}{\sqrt{c^2-v^2}}$, 因光速不同引入的光程差为 z= $\frac{2lc^2}{c^2-v^2}-\frac{2l'c}{\sqrt{c^2-v^2}}\approx \frac{lv^2}{c^2}$. 如果平稳转动于涉仪直 到 90°,两臂的光程差会由 $\frac{lv^2}{c^2}$ 变成 $-\frac{lv^2}{c^2}$,对应于 式(5)所示的光强会有连续的变化过程,其最大的 变化量由 $z=\frac{2lv^2}{z^2}$ 决定. 若反射镜 e 与反射镜 e₁ 偏离正交小角度,则在转动过程中可通过望远镜 f 观察到干涉条纹的平移,最大的平移量也由z= $\frac{2lv^2}{c^2}$ 决定. 由式(5)知道,光程差的变化为半个波 长时,干涉场的光强会发生最大程度的亮暗翻转 变化,对于直条纹来说,亮条纹会移动到相邻的暗 纹处. 地球自转和公转引起的地面速度 v≈3× 10^4 m/s ,光速 $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$,钠光灯波长 $\lambda \approx$ $5.9 \times 10^{-7} \text{ m,则由} \frac{2lv^2}{c^2} = \frac{\lambda}{2}$ 估算得到 $l \approx 15 \text{ m,亦}$ 即干涉仪的臂长设置在 15 m 附近时可以引起 0.5个条纹移动的光强变化, 当年的迈克耳孙干 涉仪臂长为11 m,以同样的估算可以得到条纹的 移动量约为 0.4 个条纹,因此能被显著观测到. 然而,实际情况却是通过反复实验均未观察到所 期待的条纹移动,因此称其为"零结果",即条纹本 身不会移动,该结果促使研究者重新审视物理学 的基本问题,奠定了爱因斯坦狭义相对论关于光 速不变性原理的实验基础.

2.2 LIGO 的迈克耳孙干涉仪

1916年,即广义相对论场方程形成的第 2年,爱因斯坦预言了引力波的存在,他发现线性化的弱场方程具有波动解:由震源质量四极矩的时间变化产生以光速传播的空间应变横波,即引力波,只是引力波的振幅会非常小.同年,施瓦兹希尔德(Schwarzschild)发表了场方程的黑洞解.1963年,科尔(Kerr)将黑洞解推广到旋转黑洞.此后的理论研究形成了二元黑洞合并的模型和引力波的精确预测.

探测引力波的实验始于 20 世纪 60 年代的共振质量探测器.干涉型探测器最早是在 20 世纪 60 年代初到 70 年代被提出,进入 21 世纪后,建造的各种干涉型探测器形成了全球网络. 2015年,LIGO成为首台开始观测的干涉型探测器,并

首次直接观测到瞬态引力波信号,该信号在35~250 Hz的频率范围内向上扫描,峰值引力波应变为1.0×10⁻²¹,其与广义相对论预测的1对黑洞的激发、合并以及由此产生单个黑洞的衰减振荡波形相匹配,证实了高扰动黑洞非线性动力学的广义相对论.

由胡克定律的相关实验可知,材料的应变定义为 $\varepsilon=\delta L/L$,是一维情况下长度 L 的相对改变量. 同理,引力波应变是时空涟漪引起空间几何上的相对改变. 在引力波经过干涉仪的过程中,空间在某方向上收缩伴随与其垂直方向上延伸,反之亦然. 由 $\varepsilon=1.0\times10^{-21}$ 可知,要想如同迈克耳孙-莫雷实验预期测得 0.4 个条纹的变化,用迈克耳孙干涉仪测量引力波的臂长需长达 10^9 km,该长度超过了地球到太阳的距离 $(1.5\times10^8$ km),显然无法做到.

图 8 是 LIGO 的迈克耳孙干涉仪的示意图, 从其直观构造来看,值得引人关注的是:

1)正交的两臂各包含 1 个长为 L=4 km 的 法布里-珀罗腔,二者在引力波中的腔长分别为 L_x 和 L_y . 准直入射的 Nd: YAG 激光(波长为 1 064 nm)在腔中经过 b=300 次反射后,形成的 光程差为 $z=2b(L_x-L_y)$.

2)输入端的功率回收镜在整个干涉仪中提供了额外的激光共振增强,使得 20 W 的激光输入增加到 700 W,再入射到分束器.

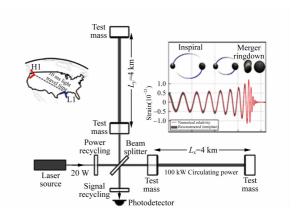


图 8 LIGO 迈克耳孙干涉仪实验装置示意图[3]

其中,法布里-珀罗腔的作用与迈克耳孙-莫雷实验中置入的多个反射镜作用类似,是为了更大限度地加大光程,放大极其微小的空间应变产生的光程差 δz . 同时,腔的长度 L 提供了测量空间应变 h(t) 的尺度,将 δz 与 h(t) 联系起来,即

 $\delta z = 2bLh(t)$, $\sharp + h(t) = \frac{\delta L_x - \delta L_y}{L}$.

从原理上看,LIGO 的干涉强度可由式(5)计算,但是实际形成的光程差 $\delta z \approx 2.4 \times 10^{-6}$ nm,此微小量显然靠式(5)无法测得. 值得庆幸的是光的量子理论提供了强大的光子计数测量方法,建立起了干涉仪输出光子数 N 的概率分布与入射到干涉仪的光子数 N_o 的概率分布之间的统计关系,得到了二者的统计均值 \overline{N} 和 $\overline{N_o}$ 之间满足与式(5)相似的关系[4],即

$$\overline{N} = \overline{N_0} \sin^2\left(\frac{k_0 z}{2}\right),\tag{6}$$

并且输出光子数 N 的统计方差正好等于其均值 \overline{N} ,则光子计数的标准差,即不确定度为

$$\sqrt{N} = \sqrt{\overline{N_0}} \sin\left(\frac{k_0 z}{2}\right).$$
(7)

由式(6)可知,当光程差 z 变化时,探测到的光子数 \overline{N} 随之变化.对式(6)微分,即可得到对应于空间应变 h(t)的光子均值变化为

$$\delta \overline{N} = \overline{N_0} kbL \sin(k_0 z) \cdot h(t). \tag{8}$$

令式(7)和式(8)相等,可以得到可测的最小空间 应变为

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi b L \cos\left(\frac{k_0 z}{2}\right) \sqrt{N_0}},\tag{9}$$

其中,探测时间 T 内输入干涉仪的光子数均值 $\overline{N_0}$ 等于光强为 I_0 的入射光波在探测时间 T 的输入能量与单个光子能量 $\hbar\omega$ 的比值,即 $\overline{N_0} = \frac{TI_0}{\hbar\omega}$. 另外,设无引力波状态的干涉仪光程差 $z \approx 0$,则 $\cos\left(\frac{k_0z}{2}\right) \approx 1$,代入式(9)可得

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi h L} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{T L_0}}, \qquad (10)$$

可见,大功率的入射光强可提高引力波探测的灵敏度. 另外,将 T 理解为探测器的采样周期,则 T 与待测引力波的最高频率 $f_{\rm M}$ 应该满足采样定理,即 $T \leq \frac{1}{2f_{\rm M}}$. 取 $f_{\rm M} = 500$,则 T = 1 ms,即采样频率为 1 kHz. 将文献[3]给出的参量 b = 300, $L = 4 \times 10^3$ m, $I_0 = 700$ W 和 $\lambda = 1$ 064 nm 代入式(10),得到 $h_{\rm min} \approx 3.3 \times 10^{-23}$. 因此,如此配置的LIGO干涉仪可以探测到空间应变在 10^{-21} 量级上的引力波.

LIGO 是用其干涉仪内置的法布里-珀罗腔

来精确感应和度量应力波的空间应变,因此腔体反射镜的位置不确定度 Δx 必须得到有效控制,使其小于 Lh_{\min} . 由于反射镜位置不确定度 Δx 与其动量不确定度 Δp 必须满足测不准关系,即 $\Delta x \cdot \Delta p \geqslant h$,而 Δp 可由测量时间 T 内的位置不确定度估计为 $\Delta p = \frac{m\Delta x}{T}$,则 $\Delta x \geqslant \sqrt{\frac{Th}{m}}$. 因此,要保确 10^{-23} 量级的灵敏度,就必须给反射镜配置足够大的质量 m,使得 $h_{\min} \geqslant \frac{1}{L} \sqrt{\frac{Th}{m}}$,则在同样的参量条件下反射镜的质量 $m \geqslant 100$ kg. 这与物理学的基本常识一致,即惯性质量越大的物体,其位置更不容易改变.

由式(10)可以看出,入射干涉仪的光强 I_0 越 大,引力波探测的灵敏度越高. 因此,LIGO 采用 大功率的激光照明,并在输入端配置功率回收镜, 可以使得照明功率进一步增大, 这里同时需要考 虑大功率激光照明的负面影响,即强光对反射镜 施加的辐射压力(光压),使得光压对反射镜位置 影响的不确定度小于引力波探测的设定灵敏度. 由前面的分析已知,T时间探测到光子数 $\overline{N} = \frac{TI_0}{\hbar a}$ 的不确定度为 \sqrt{N} ,则光子弹性反射过程中转移 给反射镜动量的均值为 $p=2\hbar bk_0\overline{N}$,不确定度为 $\Delta p = 2\hbar k_0 b \sqrt{N}$. 因此,不确定的动量引起反射镜 位置的不确定量为 $\Delta x = 2T\hbar k_0 b \frac{\sqrt{N}}{m}$,令其小于 Lh_{\min} ,得到 $I_0 \leqslant \frac{mc^2}{4\omega b^2 T^2}$. 代入前面的参量得到 $I_0 \leq 1.0 \times 10^5$ W. 这意味着 LIGO 可以通讨提高 激光功率进一步提升引力波的探测灵敏度,如将 1.0×10^5 W代入式(10),得到 $h_{min} = 2.8 \times 10^{-25}$.

3 基于迈克耳孙干涉仪的傅里叶变换光 谱检测

与广泛应用于可见光波段光谱检测的光栅光谱仪相比,傅里叶变换光谱仪广泛应用于红外,特别是中远红外波段光谱的检测,这是因为在中远红外波段,傅里叶变换光谱仪的光谱分辨率更高,光谱探测范围更大,并且技术上也更容易实现^[2].在可见光波段,采用大面积全息光栅分光和大规模阵列光电探测器摄谱,使得光栅光谱仪因其快捷高效和高分辨而被广泛应用.也正是因为涉及

的高科技元素,光栅光谱仪具有技术复杂性和高成本的特点.相比之下,傅里叶变换光谱仪的结构简单,在原理上就是带有计算机数据采集和处理的迈克耳孙干涉仪[5].将傅里叶变换光谱仪在中远红外波段的优势引入到可见光波段,是值得关注的课题.

3.1 基本原理

如图 9 所示的迈克耳孙干涉仪光路,准直光波入射,出射干涉光波经会聚透镜聚焦在光电探测器上,探测器接收到的光强存入电脑并在其屏幕上显示.

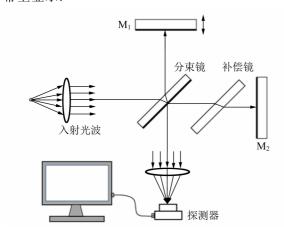


图 9 傅里叶变换光谱测量的原理光路

入射的准直光波是所含各种频率平面光波的 线性叠加,其电场可以表示为

$$E_0(\widetilde{z},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(k\widetilde{z} - \omega t)} dk, \qquad (11)$$

其中 k, ω, A 分别为所含光频成分的波矢、角频率和复振幅,z为光程. 将式(11)代入式(4),用 z 表示光波经过干涉仪两臂的光程差,整理后得到

$$\gamma(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 e^{ikz} dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 dk}, \qquad (12)$$

$$\gamma^*(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |A(-k)|^2 e^{ikz} dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 dk}.$$
 (13)

因此得到

$$\operatorname{Re}\left[\gamma(z)\right] = \int^{+\infty} \overline{A^2(k)} e^{ikz} dk, \qquad (14)$$

其中, $\overline{A^2(k)}$ 为归一化光谱强度的密度函数,其表达式为

$$\overline{A^{2}(k)} = \frac{|A(k)|^{2} + |A(-k)|^{2}}{2 \left(|A(k)|^{2} dk \right)}. \quad (15)$$

由式(14)可知,Re $[\gamma(z)]$ 是以归一化光谱强度为权重的所有余弦函数的线性叠加.由于仅在 z=0 处,不同周期的余弦函数才会同相位叠加,因此 Re $[\gamma(z)]$ 仅在 z=0 附近区域不为零.基于光波自相关函数的定义,该不为零区域有效宽度的一半为光波波包的长度,即相于长度.

对式(14)求平均得到 $\overline{\gamma(z)}=0$,则由式(3)可得 $\overline{I(z)}=\frac{1}{2}I_0$,因此式(3)可写成

Re
$$[\gamma(z)] = \frac{\overline{I(z)} - I(z)}{\overline{I(z)}}$$
, (16)

式(16)表明,可以通过实验测量 I(z)得到波包长度,亦即光波的相干长度.对式(14)和式(16)分别做傅里叶变换,得到

$$\overline{A^{2}(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{I(z)} - I(z)}{\overline{I(z)}} e^{-ikz} dz, \quad (17)$$

其中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\overline{A^2(k)} = \mathcal{F}\left\{\frac{\overline{I(z)} - I(z)}{\overline{I(z)}}\right\}$. 因此,利用测得的光强数据做傅里叶变换即可得到归一化的光谱强度分布 $\overline{A^2(k)}$.

思考与练习4:

1)考虑氦氖激光(λ_0 =633 nm)准直入射迈克 耳孙干涉仪,设定 $|A(k)|^2 = \delta(k-k_0)$,求 $Re[\gamma(z)]$.

2)考虑低压汞灯黄光(双线: $\lambda_1 = 576.96 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 579.07 \text{ nm}$)准直入射迈克耳孙干涉仪,设定 $|A(k)|^2 = \delta(k - k_1) + \delta(k - k_2)$,求 Re $[\gamma(z)]$, 并作图说明其特征.

3)考虑高压汞灯黄光(双线: λ_1 =576.96 nm, λ_2 =579.07 nm)准直入射迈克耳孙干涉仪.由于灯管内汞原子气体的气压高,汞原子间碰撞会使得汞原子发光的谱线显著增宽,增宽的谱线分布为洛伦兹函数 $f(k) = \frac{\alpha}{\pi(c^2k^2 + \alpha^2)}$,其中 α 为半高半宽,c 为光速,则高压汞灯的黄光光谱分布为 $|A(k)|^2 = [\delta(k-k_1) + \delta(k-k_2)] * f(k)$,求 Re $[\gamma(z)]$,并作图说明其特征.

3.2 实验技术

依据式(17)可知,通过傅里叶变换计算入射光波光谱强度 $\overline{A^2(k)}$ 的核心问题是如何精确测量随着光程差 z 变化的出射光波干涉光强 I(z). 光程差 z 的改变是通过移动反射镜 M_1 来实现,一系列的光强测量数据要求在远小于光波长的尺度上精确确定反射镜 M_1 的位移. 转动迈克耳孙干

涉仪上的转轮(见图 2)可以平稳地移动反射镜 M_1 ,但是仪器上的读数不能满足所要求的定位精度,并且手动的读数效率难以完成大量的数据采集.解决该问题的通用做法是:与待测准直光波并行入射用于光程差校准的准直激光,如图 10 所示,用 1 个探测器测量微光的干涉光强 $I_c(z)$,用另 1 个探测器测量待测光波的干涉光强 I(z),且 2 个探测器同步采集各自的光强信号.由式(5)知道, $I_c(z)$ 是关于 kz/2 的正弦平方信号,故可以利用测得的 $I_c(z)$ 系列数据反推出与 I(z)共同对应的 z 系列数据.因此,无论用手转动仪器上的转轮还是电机驱动,只要保持 M_1 反射镜沿着单方向移动,就可以在半波长的精度上准确获得所测 I(z)对应的光程差 z,从而为式(17)的傅里叶变换计算提供准确的测量数据.

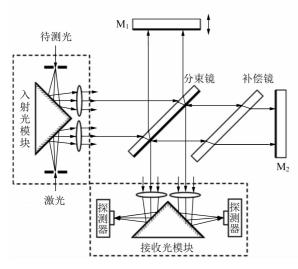


图 10 傅里叶变换光谱测量的应用光路

在教学型迈克耳孙干涉仪上进行上述测量的优化方法所对应的光路示意图如图 10 所示,构造入射光模块和接收光模块,与干涉仪组合,搭建成傅里叶变换光谱系统. 激光和待测光波聚焦到各自的入射孔,2 个探测器经 A/D 模数转换电路接到计算机. 用电机驱动或者用手转动干涉仪上的转轮,通过计算机记录 $I_c(z)$ 和 I(z) 的序列数据. 最后,利用 $I_c(z)$ 的测量数据反推光程差 z,即可完成实验的测量部分.

思考练习5:

1)写出利用 $I_c(z)$ 的测量数据反推 $I_c(z)$ 和 I(z)共同对应光程差 z 的具体算法. 能否在数据采集过程中实时完成该算法?

- 2)在采集数据的过程中保持反射镜 M₁ 的单方向平移很重要,想想这是为什么?
- 3)尝试按图 10 所示的光路搭建实验系统,测量白光、低压汞灯、高压汞灯的干涉光强数据,并确定每个干涉光强数据所对应的光程差.

3.3 计算方法

式(17)定义的傅里叶变换需要转换成离散求和的形式来进行,这里涉及到 2 个基本问题: a. 如何用有限数量的离散函数值表征无限个连续函数值所包含的信息; b. 如何高效计算大量数据求和的离散傅里叶变换. 前者要满足抽样定理的要求,后者要靠快速傅里叶变换^[6]来完成. 为了方便且不失一般性,考虑如下形式傅里叶变换的离散化问题

$$\mathscr{F}{f(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx, \qquad (18)$$

其中 $k=1/\lambda$. 这里具体使用的函数是 $f(x) = e^{-x^2}$ 和其傅里叶变换 $\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\pi k^2}$.

f(x)的函数图形如图 11(a)所示,使其离散化就是其本身乘以图 11(b)所示的采样函数,即

$$\Delta(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\Delta x), \sharp + \delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

 Δx 为采样间隔. 为了将无限区间的积分变为有限区间的求和,需要乘以图 11(c) 所示的窗函数,

即
$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right], 4$$
 得到离散函数 $0, x \notin \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \end{cases}$

 $f_0(x) = f(x)\Delta(x)h(x)$,如图11(d)所示,其仅在 箭头所指的位置取函数 f(x)的值.

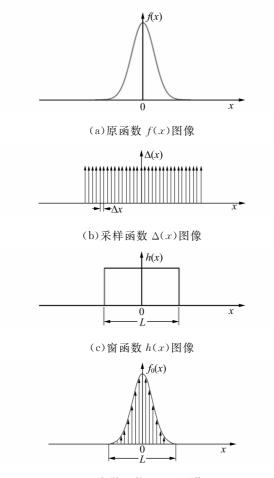
为了获得离散化的傅里叶变换,还需将函数 $f_0(x)$ 周期化. 这里需引入以窗函数宽度 L 为空

间周期的 δ 序列函 数 $\nabla(x) = L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-nL)$,并与 $f_0(x)$ 做卷积运算,得到 $\tilde{f}(x) = \nabla(x) *$ [$f(x)\Delta(x)h(x)$],其函数图形如图 12(a) 所示. 对所构造的周期性函数 $\tilde{f}(x)$ 做傅里叶变换,即 $\tilde{F}(k) = \mathcal{F}\{\tilde{f}(x)\}$,则有

$$\widetilde{F}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \frac{n}{L}\right) \cdot G(k) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \frac{n}{\Delta x}\right),$$
(19)

其中 $G(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} * \mathcal{F}\{h(x)\}$. 在 L 足够大的条件下, $\mathcal{F}\{h(x)\} \approx \delta(x)$,因此 $G(k) \approx \mathcal{F}\{f(x)\}$.

这样,G(k) * $\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(x-\frac{n}{\Delta x}\right)\right]$ 以 $\frac{1}{\Delta x}$ 为周期呈现 $F(k)=\mathscr{F}[f(x)]$,然后乘上以 $\frac{1}{L}$ 为空间周期的 δ 序列函数,最终形成离散化的 $\widetilde{F}(k)$,其函数图像如图 12(b) 所示.



(d)离散函数 $f_0(x)$ 图像 图 11 连续函数的离散化

对比图 12(a)和图 12(b)可以发现,对原函数 f(x)离散化处理的 2 个参量直接影响傅里叶变换的结果:截断长度 L 大,则傅里叶变换的谱分辨高; Δx 小,对原函数细节的分辨高,傅里叶变换的谱周期 $1/\Delta x$ 大,相邻周期的重叠少,高频谱的结果更准确. 但是,大的 L 和小的 Δx 会导致计算量较大. 若 $\mathcal{F}\{f(x)\}$ 存在最高空间频率,即截止波数 k_{\max} (截止波长 λ_{\min}),则在采样间隔 Δx 满足采样定理 $\left(\Delta x \leqslant \frac{1}{2k_{\max}} = \frac{\lambda_{\min}}{2}\right)$ 的条件下,傅里叶变换的高频成分才是严格准确的. 因此,在准备实验数据时,应明确数据间隔是否小于待测光谱

范围最小波长的 1/2;实验数据的长度 L 与需要分辨的波数 Δk 是否满足 $1/L \leq \Delta k$.

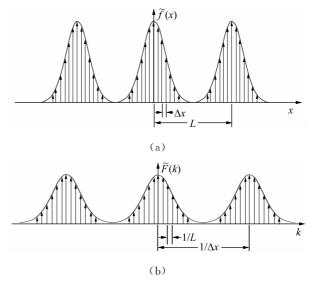


图 12 傅里叶变换的函数周期化

按照上述的离散化处理,离散的周期性函数 $\tilde{f}(x) = \nabla(x) * [f(x)\Delta(x)h(x)]$ 与其傅里叶变换 $\tilde{F}(k) = \mathcal{F}\{\nabla(x) * [f(x)\Delta(x)h(x)]\}$ 在1个周期里的采样点数目总相等. 设定从原点开始从左到右的1个周期里,等间距编号0,1,2,…,N-1,采样N个数值,则有

正变换:
$$\widetilde{F}\left(\frac{n}{L}\right) = \sum_{m=0}^{N-1} \widetilde{f}(m\Delta x) e^{-2\pi i m m/N},$$
 (20)

逆变换:
$$\widetilde{f}(m\Delta x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{F}\left(\frac{n}{L}\right) e^{2\pi i m n/N},$$
 (21)

其中 $m,n=0,1,\dots,N-1$. 式(20)~(21)即为离散傅里叶变换的求和形式. 由于用于傅里叶变换的数据量通常很大,直接求和的计算效率太低,因此一般采用快速傅里叶变换,即 FFT. 在数据处理的编程过程中,只需掌握调用 FFT 函数的方法即可,不必了解其具体的算法.

思考与练习6:

1)考虑高压汞灯黄光双线(双线: λ_1 = 576.96 nm, λ_2 = 579.07 nm)的傅里叶变换光谱测量,确定光强测量数据所对应光程差的最小值和采样间隔的最大值.

2)式(17)的傅里叶变换积分定义在对称的积分区间上,而式(20)及式(21)定义的离散傅里叶变换却是在正向单边区域求和. 如何理解二者之间的差异,并做何种处理才能获得待测光谱的强度分布 $\overline{A^2(k)}$?

3)光强测量数据的白噪声会如何影响光谱测量的最小分辨?周期性的相位和振幅噪声会给光谱测量带来什么影响?

4 基于迈克耳孙干涉仪的光学相干层析 成像

宽谱光源发出光波的相干长度很小,例如白 光的相干长度只有几 μm,这类光源称为低相干 光源,其光波的干涉称为低相干干涉. 利用迈克 耳孙干涉仪实现低相干干涉,只能在很小的光程 差范围内看到干涉图样. 如图 13 所示,将迈克耳 孙干涉仪的反射镜 M_2 换成待测样品 M_2 ',则来 自样品不同深度层面的反射光波分别与来自反射 镜 M₁ 的光波干涉,得到样品不同深度层面的干 涉信号. 基于该思想,原位实时探测生命活体组 织结构技术即光学相干层析(OCT)断面成像技 术于上世纪八九十年代得到了较大发展[7]. 结合 光纤、电子及计算机等高新技术,OCT 已成为用 于眼科检查和内窥镜原位活检的高端仪器. 作为 教学实验,近年来出现了一些初步的探索性工 作[8-10],但在层析成像的水平上还有诸多工作要 做. 本文围绕自由空间的迈克耳孙干涉仪,论述 OCT 层析成像的物理机制和基本实验方法,引导 学生探究层析成像的理论与技术问题.

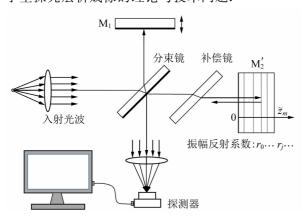


图 13 自由空间光学相干层析原理光路

4.1 时域光学相干层析

时域光学相干层析是指在图 13 所示光路中,通过移动反射镜 M_1 使其反射光波与样品 M_2 不同深度界面反射的物光发生低相干干涉,通过测量在探测器上的干涉光强随光程差改变的序列信号来解析样品各个层面的位置及其振幅反射率.

考虑图 13 的原理光路和其中所示的层状样

品,入射在分束镜上的准直光波 $E_0(\tilde{z},t)$ 具有式 (11)的表示形式,经分束镜后分成反射光束和透射光束,分束镜的正反向振幅反射率和透射率分别为 (\tilde{r},\tilde{r}') 和 (\tilde{t},\tilde{t}') . 反射光束经 M_1 反射,透过分束镜,到达探测器的光波电场为 $\tilde{r}tE_0(\tilde{z}_1,t)$,其中 \tilde{z}_1 是此光波经历的光程;透射光束直接入射到层状样品的表面上,其光波电场为 $\tilde{t}E_0(\tilde{z}_0,t)$,其中 \tilde{z}_0 是此光波到达物面时的光程. 设层状样品内部有折射率依次为 n_1,n_2,\cdots,n_N 的薄层,层厚依次为 $\Delta z_1,\Delta z_2,\cdots,\Delta z_N$. 对于入射到样品的光波,设样品表面及层间界面的振幅反射率依次为 r_0,r_1,r_2,\cdots,r_N ,相应的振幅透射率依次为 t_0,t_1,t_2,\cdots,t_N ,反向的振幅透射率为 $t_0',t_1',t_2',\cdots,t_N'$. 忽略二次反射(即图 13 中向右的反射),则第 m 界面对波矢为 k 的入射光波的振幅反射率为

$$\alpha_m^k = \widetilde{r_m} e^{i2kl_m}$$
, (22)

其中 $m=0,1,2,\cdots,N;$ $l_m=\sum_{s=1}^m n_s \Delta \widetilde{z_s}.$ 当 m=0, $\widetilde{r_0}=r_0; m>0, \widetilde{r_m}=t_0t_0'\cdot t_1t_1'\cdot t_2t_2'\cdots t_{m-1}t_{m-1}'\cdot r_m.\alpha_m^k$ 调制式(11) 所示准直光波中的波矢成分,使出射样品表面的光波经分束镜反射后,到达探测器上的电场为 \widetilde{r}' $\widetilde{t}\sum_{m=0}^N \widetilde{r_m} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k(\widetilde{z}+2l_m)-\omega l} \mathrm{d}k$,其中 \widetilde{z} 为经样品表面反射的光波到达探测器的总光程,

$$E(\tilde{z},z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)B(z,k) e^{i(k\tilde{z}-\omega t)} dk, \quad (23)$$

$$\sharp \Phi$$

则探测器上来自干涉仪两臂光波的叠加电场为

$$B(z,k) = \widetilde{r} \ \widetilde{t} \ \widetilde{r_s} e^{ikz} + \widetilde{r'} \ \widetilde{t} \sum_{m=0}^{N} \widetilde{r_m} e^{i2kl_m}, (24)$$

其中, \tilde{r} 。为反射镜 M_1 的振幅反射率, $z=\tilde{z_1}-\tilde{z}$ 为 经平面镜 M_1 反射的光波相对于样品表面反射光波的光程差. 依据光强定义,探测器探测到的光强应为 $I(\tilde{z},z)=\frac{\varepsilon_0 c}{2T}\Big||E(\tilde{z},z,t)||^2 dt$,由此得到

$$I(z) = \frac{\epsilon_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 |B(z,k)|^2 dk.$$
 (25)

利用式(12) \sim (13)、斯托克斯倒逆关系 $\tilde{r}=-\tilde{r}$ 和分束镜 1:1 的分光特性 $(|\tilde{r}|=|\tilde{t}|=1/\sqrt{2})$,整理得到

$$I(z) = \overline{I(z)} - \frac{1}{2} I_0 \sum_{m=0}^{N} \widetilde{r_s} \, \widetilde{r_m} \operatorname{Re} \left[\gamma(z) \right] * \delta(z - 2l_m),$$
(26)

其中, $\overline{I(z)}$ 为 I(z) 的平均值, I_0 为入射干涉仪的 光波强度, $\gamma(z)$ 为入射光波自相关函数.由式 (26)可以看出,样品中每个界面反射出来的低相干光波只会与反射镜 M_1 反射且在 $z=2l_m$ 附近时的低相干光波发生干涉,呈现峰值为 $\widetilde{r_s}$ $\widetilde{r_m}$ 的干涉光强信号 $\gamma(z)$,这样即可获得样品表面和内部各层的位置坐标和振幅反射率.由式 (4)和式 (12) \sim (13)可知, $\gamma(z)$ 为偶函数,在 z=0 处的模值最大.低相干照明光波的光谱范围宽,则光波相干长度很小,亦即 $\gamma(z)$ 的非零区域很小.这样,随着反射镜 M_1 的移动,就可以在随光程差改变的 I(z) 曲线上,互不干扰地显示出层间距大于 $\gamma(z)$ 区间宽度的反射层位置和反射光强度.

思考与练习7:

1)设
$$A(k) = \begin{cases} A_0, k \in [k_1, k_2] \\ 0, k \notin [k_1, k_2] \end{cases}$$
,试求

 $E_0(\tilde{z},t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(k\tilde{z}-\omega t)} dk$ 的自相关函数 $\gamma(z)$ 及 Re $[\gamma(z)]$. 取 $k_1 = 1.25 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$, $k_2 = 2.50 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$,绘图表示 Re $[\gamma(z)]$.

2) 如果图 13 中的层状物是厚度为 0.2 mm, 折射率为 1.50 的平板玻璃,前后面的振幅反射率均为 0.05,反射镜 M_1 的振幅反射率 $\widetilde{r_s}=1$,入射光波与题 1) 相同. 试按式(26) 确定 $\overline{I(z)}-I(z)$ 随光程差 z 变化的函数关系及其图像.

3) 如由题 1) 所述的低相干光波入射,以 $Re[\gamma(z)]$ 的半高全宽为最小分辨尺寸,试利用式(26) 讨论可以分辨的待测物层间距.

4.2 频域光学相干层析

在图 13 所示的光路中,频域光学相干层析与时域光学相干层析不同的是反射镜 M_1 保持在确定的位置不动,用光谱仪取代光探测器来接收干涉的光强信号.

如图 14 所示,把式(23) 表示的准直光波聚焦 到光栅光谱仪的人射狭缝,经谱仪内部的凹面反 射镜再换成准直光波,并且以入射面与光栅栅线 垂直的方式斜入射到光栅上.光栅以反射的方式 将入射的准直光波按波长衍射成不同方向的单色 准直光波,随后的另一凹面反射镜将不同方向的 单色准直光波聚焦到谱仪的谱面上,并用放置在谱面上的探测器接收光谱的光强.

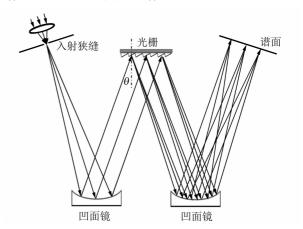


图 14 光栅光谱仪的光学傅里叶变换原理光路

根据夫琅禾费衍射,谱面上的光场可表示为 光栅表面反射光场的光学傅里叶变换.取光栅平 面的法线为Z轴,光栅栅线方向为Y轴,则垂直于 光栅栅线方向为X 轴,XZ 平面为准直光波的入 射面.以 θ 角入射的准直光波在光栅面(x,y) 光 场的每个波矢 k 分量均增加相位因子 $e^{ikr \sin \theta}$.因 此,由式(23)得到投射在光栅上的光场为

$$E(\tilde{z},z,x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)B(z,k) e^{i(k\tilde{z}-\omega t)} e^{ikr\sin\theta} dk,$$
(27)

其中, \tilde{z} 为图 13 中经样品表面反射光波的光程,z 为反射镜 M_1 反射的光波相对于物表面反射光波的光程差. 设光栅的振幅反射率为 $\tilde{r_g}(x)$,光栅被照明的区域为 H(x,y),则光栅表面的反射光场在谱面 (\tilde{x},\tilde{y}) 的夫琅禾费衍射为[11]

$$G(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},z_0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tilde{z},z,x,t) H(x,y) \cdot$$

 $\tilde{r}_{g}(x) \exp \left\{-ik\left[\left(\frac{x}{f}\right)x + \left(\frac{y}{f}\right)y\right]\right\} dxdy$, (28) 其中,f 为聚焦凹面镜的焦距. 设光栅的矩形衍射区域的长和宽分别为 $2L_{x}$ 和 $2L_{y}$,在照明区域 H(x,y)=1,其他区域为零. 光栅的振幅反射率是关于x的周期性函数,展成傅里叶级数为

$$\widetilde{r}_{\mathrm{g}}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mk_{0}x},$$

其中 $k_0 = 1/d$, d 为光栅常量. 这样可以得到

$$G(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z},z,t) = 4L_x L_y \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)B(z,k) e^{i(k\widetilde{z}-\omega t)} \delta\left(\widetilde{x} - \frac{fk_0 m + fk\sin\theta}{k}\right) \delta(\widetilde{y}) dk, \quad (29)$$

其中利用了 $sinc x \approx \delta(x)$. 由于通常的光栅光谱仪只采集 1 级光谱,因此谱面上的光强为

$$I(z,k) = \frac{1}{2} c \epsilon_0 S |a_1|^2 |A(k)|^2 |B(z,k)|^2,$$
 (30)

其中, $k = \frac{k_0}{\tilde{x}/f - \sin \theta}$ 可确定波矢为k的光谱强度

处在谱面上的位置 \tilde{x} , $S=4L_xL_y$ 为光栅上衍射区域的面积. 事先设定干涉仪中平面反射镜 M_1 的位置 $z=z_0$,则 $I(z_0,k)$ 的数据完全由光谱仪给出. 对式 (30) 两边做傅里叶逆变换,并利用式 $(12)\sim(13)$ 和式 (24) 的关系,可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(z_{0}, k) e^{ikz} dk = I_{0}S | a_{1} |^{2} \left\{ | \tilde{r} \tilde{r}_{s} \tilde{t} |^{2} + | \tilde{t} \tilde{r}' |^{2} \sum_{m=0}^{N} | \tilde{r}_{m} |^{2} \right\} \gamma(z) * \delta(z) + I_{0}S | a_{1} |^{2} | \tilde{t} \tilde{r}' |^{2} \sum_{\substack{m,m'=0\\m\neq m'}}^{N} \tilde{r}_{m} \tilde{r}_{m'} \gamma(z) * \delta[z + 2(l_{m} - l_{m'})] + I_{0}S | a_{1} |^{2} | \tilde{t} |^{2} \tilde{r} \tilde{r}' \tilde{r}_{s} \sum_{m=0}^{N} \tilde{r}_{m} \gamma(z) * \left\{ \delta[z + (z_{0} - 2l_{m})] + \delta[z - (z_{0} - 2l_{m})] \right\},$$

$$(31)$$

其中, $\tilde{r}_m \gamma(z) * \delta(z-z_m)$ 中的 $\tilde{r}_m n z_m$ 分别表示样品内各层的反射强弱及其位置深度,因此该因子包含了样品的待测信息. 不难看出,等式右边第 1 项显示样品的所有待测信息在 z=0 处叠加,不可分辨;第 2 项包含的待测信息分布在区域一 $2l_M < z < 2l_M$,各层信息相互重叠,不便分离,其中 l_M 为待测样品的有效深度;第 3 项包含的样品层状信息按 $z=\pm [z_0-2l_m]$ 分布在 $z < z_0$ 和 $z > -z_0$ 的区域. 为了使第 3 项与第 2 项不重叠,选定的 $|z_0|$ 应适当大一些,使得可以有效分离出第 3 项,得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(z_0, k) e^{ikz} dk \propto \beta \sum_{m=0}^{N} \widetilde{r}_m \gamma(z) * \left\{ \delta [z + (z_0 - 2l_m)] + \delta [z - (z_0 - 2l_m)] \right\}, \quad (32)$$

其中 $\beta = I_0 S |a_1|^2 |\tilde{t}|^2 \tilde{rr'r_s}$. 如此利用式(30)对光谱仪测得的光谱强度数据做傅里叶逆变换,从中获得 $\tilde{r_m}\gamma(z) * \delta(z-z_m)$ 关于所有 m 的数值,从而获得待测样品的层状结构信息. 利用这些数据,借助于图像处理的技术就可以构建待测样品的层状结构图像.

思考与练习8:

1)按文中的定义 $z_0 = \widehat{z_1} - \widehat{z_2}$ 为反射镜 M_1 在某个位置时反射的光波相对于物表面反射光波的光程差,其取值可正可负. 试分析式(32),分别给出当 $z_0 > 0$ 和 $z_0 < 0$ 时,式(32)所包含待测物信息的分布区域.

2)如果待测物是思考与练习 7 题 2)中的玻璃片,试给出式(32)所示的待测物信息分布.如果是若干个这样的玻璃片叠在一起,分析式(32)所示的待测物信息分布.

4.3 光学相干层析的实验方法

由于实际待测样品的复杂性,层状反射的分 析仅在样品纵深方向周围微小区域近似成立,因 此,实际的光学相干层析测量需要使用显微物镜 将准直光聚焦到样品表面. 然而,聚焦的结果导 致层状反射的分析局限在物镜景深的范围内,并 且聚焦点越小,景深范围也越小. 为了兼顾较大 的层析深度,OCT 一般采用数值孔径较小的物 镜. 当物镜将光波聚焦到样品上一点时,可以通 过时域或频域 OCT 的数据采集,得到该点在纵 深方向上成像的样品信息,即"A-扫描". 要获得 样品的三维成像信息,还需要进行"B-扫描",即在 横向的二维区域逐点进行 A-扫描. 时域 OCT 的 A-扫描是通过移动反射镜 M₁ 来实现的,而频域 OCT 只需要将反射镜 M₁ 设置在固定的位置,仅 做 B-扫描即可, A-扫描的信息从光谱仪采集的光 谱数据中提取. 这样,频域 OCT 比时域 OCT 的 效率更高,应用也更为广泛.

图 15 所示为基于教学型迈克耳孙干涉仪的 OCT 实验原理光路. 值得注意的是,物镜对平行光束的聚焦实际上是将平行光变换为以聚焦点为束腰的高斯光束,束腰的尺寸对应于聚焦点的大小,能够决定 OCT 成像的横向分辨. 按照高斯光束的理论,束腰截面上各点的波矢平行,离开束腰截面朝两边各移动 $z_R = \pi \omega_0^2/\lambda$ 的距离,其间的波矢与束腰上的波矢近似平行,因此 OCT 探测的成像深度为 $2z_R$. 显然,数值孔径大的物镜引起束腰小的高斯光束,导致浅的成像深度,而选择短的照明光波可以扩大层析深度.

由式(26)和式(32)已经知道,OCT 在深度方

向上的最小分辨尺度仅取决于光源的自相关函数 $\gamma(z)$ 的半高全宽(FWHM),亦即取决于光源的谱强度分布函数 $|A(k)|^2$. 选用宽谱的低相干光源,使得 $\gamma(z)$ 的半高全宽远小于成像深度,是发展 OCT 成像技术的基本方面.

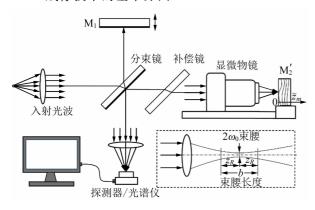


图 15 自由空间光学相干层析的测量原理光路

思考与练习9:

- 1)利用图 15 所示的光路,尝试分别用时域和 频域的光学干涉层析成像方法,实现思考与练习 8 中题 2)所述问题的实验测量.
- 2)尝试利用实验测得的 $\tilde{r}_m \gamma(z) * \delta(z-z_m)$ 数据,构建玻璃片堆的层状结构成像.

5 教学要求

5.1 实验内容

利用实验室配备的实验装置:教学型迈克耳孙干涉仪、光源、光探测器、数据采集系统、光谱仪、光学镜片、层状样品等,选做下面2个内容中的1个:

- 1) 搭建傅里叶变换光谱采集系统,完成对卤素灯、高压汞灯及低压汞灯的自相关函数检测,并通过快速傅里叶变换完成各光源发光谱的计算.
- 2) 搭建光学相干层析实验系统,用盖玻片制备层状样品,用卤素灯为低相干光源,完成对自制层状样品断面的时域和频域 OCT 检测,并进一步探讨 OCT 断面成像的理论与技术问题.

5.2 面谈讨论

关于搭建傅里叶变换光谱检测装置的问题:

- 1)实验者分别展示测得激光与卤素灯准直 光,以及激光与高压汞灯准直光经过干涉仪出射 的2对并行干涉光强曲线,讨论实验中可能存在 的问题.
 - 2)实验者展示对测得光强数据做离散傅里叶

变换的结果,分析反射镜 M_1 的非匀速移动对光谱测量的影响,讨论利用激光的干涉光强特征,校准反射镜 M_1 非线性移动的数据处理方法.

3)实验者展示用氦氖激光的干涉光强对反射 镜移动做线性化校准后,卤素灯和高压汞灯的干 涉光强数据和离散傅里叶变换后的结果,讨论自 组傅里叶变换光谱仪的光谱分辨能力、影响因素 及改进措施.

关于搭建光学干涉层析成像装置的问题:

- 1)实验者展示测得激光与卤素灯光经过干涉 仪出射的并行干涉光强曲线、卤素灯的自相关函 数曲线和用光谱仪测得卤素灯的光谱分布,讨论 实验中可能存在的问题.
- 2)实验者展示测得自制层状样品的单点时域和频域 OCT 干涉曲线(A-扫描),分析样品各层的位置及振幅反射率,讨论干涉信号的强度和信噪比问题.
- 3)实验者展示测得自制层状样品在1条线上 多个单点的时域和频域 OCT 干涉曲线和综合各 点信息构建的断面像,讨论在 A-扫描基础上进行 B-扫描的技术问题及断面像构建的算法问题.

5.3 口头报告和论文报告

关于口头报告和论文报告,建议在以下方面 做深入或扩展研究:

- 1)依据实验数据,探讨光谱测量精度、光谱分辨能力及信噪比等问题.
- 2)直接在自组傅里叶变换光谱仪的光路上加 吸收样品,研究样品的吸收问题.
- 3) 自制层状样品,探讨 OCT 测量和断面成像的理论与技术问题.

6 结束语

迈克耳孙干涉仪是大学物理实验或普通物理实验课程普遍开设的实验项目,其实验目的为引导学生在掌握仪器调节的基础上,观察和探究各种光的干涉现象,学习和体验干涉计量的技术和方法.在此基础上,开设"迈克耳孙干涉仪与光学自相关测量"的综合实验,将迈克耳孙干涉仪的原理深化到光学自相关测量,以此引导学生探究迈克耳孙干涉仪的原理在前沿科技的应用,在更高的层次和更广的领域将基础物理实验同前沿科技相联系,开展科研模式的专题研究.长期以来,我校坚持以科研引领实验教学的理念,推动物理实

验的教学改革和团队建设,探索研究型物理实验教学的课程模式,形成了"基础"与"创新"协同发展的基础物理实验课程体系[12-13]. 其中"综合物理实验"课程开设了一系列专题性的实验项目,激励学生以科研模式开展自主、开放、综合的实验研究. "迈克耳孙干涉仪与光学自相关测量"是该系列专题研究项目之一. 本文梳理了基于迈克耳孙干涉仪原理的若干重要的光学自相关测量问题,仅作为展开综合实验的背景材料,供学生参考.

参考文献:

- [1] 吕斯骅,段家忯,张朝晖. 新编基础物理实验[M]. 北京:高等教育出版社,2013:252-262,410-418.
- [2] 钟锡华. 现代光学基础[M]. 北京:北京大学出版 社,2003:177-197.
- [3] Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger [J], Physical Review Letters, 2016, 116(6):061102.
- [4] Loudon R. 光的量子理论[M]. 于良,等译. 北京: 高等教育出版社,1992;281-286.

- [5] 周文远,刘艳格,田建国,等. 教学用自组式傅里叶变换光谱仪[J]. 大学物理,2002,21(10):18-20.
- [6] Brigham E O. 快速傅里叶变换[M]. 柳群,译. 上海:上海科学技术出版社,1979:100-121.
- [7] Drexler W, Fujimoto J G. Optical coherence tomography [M]. Berlin: Springer, 2008:1-72.
- [8] 韩荣磊,李佼洋,韩涛,等. 时域光学干涉层析成像 实验系统的研制[J]. 物理实验,2018,38(7);26-30
- [9] 韩涛,王福娟,李佼洋,等. 频域光学干涉层析成像实验系统的研制[J]. 物理实验,2018,38(8):21-26
- [10] 董君行,赵伟鸿,邓梓彬,等.光学低相干干涉频域信号的探测和分析[J].物理实验,2022,42(8):1-7
- [11] 张朝晖,刘国超. 阿贝成像原理和空间滤波实验 [J]. 物理实验,2017,37(9);23-30.
- [12] 李智,张朝晖. 以"科研引领实验教学"理念,推动物理实验教学改革和团队建设[J]. 物理实验,2018,38(3);24-27.
- [13] 张朝晖. 发展研究型基础物理实验教学的理念与 实践[J]. 物理实验,2021,41(7):41-45.

Michelson interferometer and optical autocorrelation measurement

ZHANG Zhaohui

(Teaching Center for Experimental Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Michelson interferometer and optical autocorrelation measurement was an experimental project in the course of comprehensive physics experiment offered by the Teaching Center for Experimental Physics of Peking University. As an auxiliary teaching material of the project, this paper aimed to guide students try to understand the application of Michelson interferometer principle in modern science and technology on the basic of understanding the teaching-typed Michelson interferometer and its basic experiments. Then the students could deeply study the optical autocorrelation measurement mechanism of Michelson interferometry, and built an experimental system of Fourier transform spectrometer or optical coherence tomography based on the Michelson interferometer, as well explore the relevant physical and technical issues. Some "thinking and practice" questions were inserted in this paper, hoping that students could take them as the guidance to specifically understand the relevant physical content and experimental techniques. Finally, the "teaching requirements" clarified the basic contents of the experiment, the specific issues to be discussed in the interview and the main directions for further investigation.

Key words: comprehensive physical experiment; Michelson interferometer; optical autocorrelation measurement; gravitational wave measurement; Fourier transform spectral detection; optical coherence tomography