



集  
锦

## 方形薄板二维驻波的研究

方奕忠, 王 钢, 沈 韩, 崔新图, 廖德驹, 冯饶慧

(中山大学 物理科学与工程技术学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 通过对多种振源情形下的方形薄板二维驻波图形(克拉尼图形)的观测与研究, 得到不同频率下驻波图形的波节数  $n+1$ ,  $m+1$  及波矢  $k$ , 从而导出波速(相速)  $u$ . 实验结果与理论解析解(严格解)相比较符合得很好.

关键词: 驻波; 简正振动; 克拉尼图形

中图分类号: O317+.2

文献标识码: A

文章编号: 1005-4642(2014)01-0033-04

### 1 引 言

克拉尼图形是物理演示实验中的重要课题, 常被作为大学预备性物理实验的教学内容<sup>[1]</sup>, 类似的振动问题也常见报道<sup>[2]</sup>. 对于长方形(或正方形)薄板的克拉尼图形的研究, 之前主要集中在低频段( $f < 1$  kHz)<sup>[3]</sup>, 文献上未见高频段的报道. 本实验将在高频段从实验和理论两方面研究克拉尼图形, 讨论振动源在方形板角落或任意点时的振动情形, 并将实验值与理论解进行对比.

### 2 实验原理与理论模型

考虑如图 1 所示的二维长方形薄铜板, 假定其质量分布均匀, 厚度为  $2h$  ( $h$  很小), 边长分别为  $a$  和  $b$ . 在铜板的一角(设为原点  $O$ )有一振动点源, 以某一固定圆频率  $\omega_0 = 2\pi f$  垂直于铜板面作简谐振动. 下面考虑其振动问题, 求出共振发

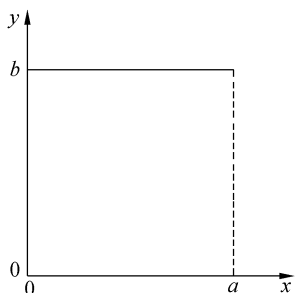


图 1 二维平板振动原理

生时的简正模式<sup>[4]</sup>, 并与实验测出的克拉尼图形比较.

假定水平放置的薄铜板的质量体密度为  $\rho$ , 弹性模量为  $Q$ , 由弹性力学或理论声学<sup>[5]</sup> 知识可知, 若设其竖直方向小振动的传播速度(相速)为  $u$ ,  $(x, y)$  点处 ( $0 < x < a, 0 < y < b$ ) 在  $t$  时刻的振动位移(挠度)为  $\eta(x, y, t)$  (取静止时的位移为零), 则  $\eta$  满足以下方程:

$$\nabla^4 \eta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

其中  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ ,  $\nabla^2$  为 Laplace 算符,  $1/c^2 = 3\rho(1-s^2)/(Qh^2)$ .  $s$  是泊松比, 对大多数材料,  $s$  约为  $0.25 \sim 0.33$ . 类似参考文献<sup>[5]</sup>, 为了研究板的简谐振动, 令  $\eta = Z(x, y)e^{-i\omega t}$ ,  $Z$  的微分方程可写为

$$\begin{cases} (\nabla^2 - \gamma^2)(\nabla^2 + \gamma^2)Z = 0, \\ \gamma^4 = \omega^2/c^2. \end{cases} \quad (2)$$

所以  $Z$  可以是方程

$$\nabla^2 Z + \gamma^2 Z = 0 \quad (3)$$

或

$$\nabla^2 Z - \gamma^2 Z = 0 \quad (4)$$

的解, 通常应该是两者的线形组合, 此时  $\gamma$  相当于简谐波的波矢  $k$ . 设边界为自由边界, 在薄板很薄, 振动很小, 板所受的重力可忽略的情况下, 边界上的弯矩、扭矩及竖直方向剪力均为 0, 此时边界条件为<sup>[6]</sup>

“第 11 届全国高等学校物理演示实验教学研讨会”论文

收稿日期: 2013-07-13; 修改日期: 2013-10-28

资助项目: 中山大学实验教学改革基金项目资助(No. YJ201109)

作者简介: 方奕忠(1969-), 男, 广东开平人, 中山大学物理科学与工程技术学院工程师, 博士, 从事大学物理实验教学与研究.

通讯作者: 王 钢(1955-), 男, 广东广州人, 中山大学物理科学与工程技术学院工程师, 从事物理实验和演示实验教学.

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + s \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0,a} = 0, \left[ \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} + (2-s) \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x=0,a} = 0, \\ \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + s \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0,b} = 0, \left[ \frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} + (2-s) \frac{\partial^3 Z}{\partial y \partial x^2} \right] \Big|_{y=0,b} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

考虑无初值问题,点  $O(0,0)$  处振源满足

$$\eta|_{x=0,y=0} = A \sin \omega_0 t, \quad (6)$$

对  $Z$  分离变量,令  $Z = X(x)Y(y)$ , 设式(3)的解为  $Z_1$ , 式(4)的解为  $Z_2$ , 则  $Z = Z_1 + Z_2$ , 其中

$$Z_1 = A_1 (\cos k_x x + B_1 \sin k_x x) (\cos k_y y + D_1 \sin k_y y), \quad (7)$$

$$Z_2 = A_2 (\operatorname{ch} k_x x + B_2 \operatorname{sh} k_x x) (\operatorname{ch} k_y y + D_2 \operatorname{sh} k_y y), \quad (8)$$

且  $k_x^2 + k_y^2 = k^2 = \gamma^2$ , 其中  $k_x, k_y$  可由边条件(5)确定. 把(7)~(8)式及  $Z = Z_1 + Z_2$  代入边条件(5), 得  $k_x$  满足

$$B_1 = B_2 = \frac{\cos k_x a - \operatorname{ch} k_x a}{\operatorname{sh} k_x a - \sin k_x a} = \frac{\sin k_x a + \operatorname{sh} k_x a}{\cos k_x a - \operatorname{ch} k_x a}. \quad (9)$$

同理,  $D_1, D_2$  及  $k_y$  也满足类似的方程, 只需将式中的  $a$  改为  $b$ . 先考虑  $k_x$ , 由(9)式得

$$\cos k_x a \operatorname{ch} k_x a = 1, \quad (10)$$

令  $\beta = k_x a / \pi$ , 把容许的  $\beta$  由小到大排列, 有  $\beta_1 = 1.5056, \beta_2 = 2.4997, \beta_3 = 3.5000, \dots$ . 由此可知, 当  $n > 2$  时,  $\beta_n \approx n + \frac{1}{2}$ , 有  $k_{xn} a = \pi \beta_n$ . 同理, 令

$k_{ym} b = \pi \beta_m$ , 则当  $m = n$  时, 有  $\beta_m = \beta_n$ . 若令  $a_n = c_m = \sqrt{A_1}, b_n = \sqrt{A_1} B_1, d_m = \sqrt{A_1} D_1$ , 可以证明, 当  $n > 2, m > 2$  时, 有

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= [a_n (\operatorname{ch} k_{xn} x + \cos k_{xn} x) + b_n (\operatorname{sh} k_{xn} x + \sin k_{xn} x)] [c_m (\operatorname{ch} k_{ym} y + \cos k_{ym} y) + \\ & d_m (\operatorname{sh} k_{ym} y + \sin k_{ym} y)] = \\ \varphi_n(x) \varphi_m(y) &= \varphi_{nm}(x, y), \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\varphi_n(x) = a_n (\operatorname{ch} k_{xn} x + \cos k_{xn} x) + b_n (\operatorname{sh} k_{xn} x + \sin k_{xn} x), \quad (12)$$

$$\varphi_m(y) = c_m (\operatorname{ch} k_{ym} y + \cos k_{ym} y) + d_m (\operatorname{sh} k_{ym} y + \sin k_{ym} y), \quad (13)$$

下面只考虑  $\varphi_n(x)$ , 后面可对  $\varphi_m(y)$  作类似处理. 式(12)中

$$b_n = a_n \frac{\cos k_{xn} a - \operatorname{ch} k_{xn} a}{\operatorname{sh} k_{xn} a - \sin k_{xn} a} = a_n \frac{\sin k_{xn} a + \operatorname{sh} k_{xn} a}{\cos k_{xn} a - \operatorname{ch} k_{xn} a}, \quad (14)$$

跟薄膜振动的正弦(或余弦)函数类似<sup>[5]</sup>, 选择  $a_n$

的值, 使  $\int_0^a \varphi_n^2(x) dx = \frac{a}{2}$  成立, 结果得  $a_n$  和  $b_n$  的值为  $a_1 = 0.707, b_1 = -0.696; a_2 = 0.707, b_2 = -0.707; a_3 = 0.707, b_3 = -0.707, \dots$ , 故当  $n > 2$  时,  $a_n$  和  $b_n$  的绝对值几乎都等于  $1/\sqrt{2}$ , 但两者反号. 这些函数满足

$$\int_0^a \varphi_n(x) \varphi_l(x) dx = \begin{cases} 0, & l \neq n; \\ a/2, & l = n. \end{cases} \quad (15)$$

当  $n > 2$  时, 有

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-\pi \beta_n x/a} - (-1)^n e^{\pi \beta_n (x-a)/a}] - \\ &\sin \left( \frac{\pi \beta_n}{a} x - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

通过数值计算, 如  $n=2$  时,  $\varphi_2(x)$  的节点为

$$x_{21} = 0.1312a, x_{22} = 0.5000a, x_{23} = 0.8679a;$$

$n=3$  时,  $\varphi_3(x)$  的节点为

$$x_{31} = 0.0944a, x_{32} = 0.3558a,$$

$$x_{33} = 0.6442a, x_{34} = 0.9055a.$$

由文献[5]知,  $\varphi_n(x)$  的节点数为  $n+1$ , 注意节点的分布关于过薄板中心点且与  $y$  轴平行的直线对称. 对  $y$  方向的分析也完全类似, 将式(16)中的  $a$  改为  $b, n$  改为  $m, x$  改为  $y$ , 可得  $m > 2$  时, 有

$$\begin{aligned} \varphi_m(y) &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-\pi \beta_m y/b} - (-1)^m e^{\pi \beta_m (y-b)/b}] - \\ &\sin \left( \frac{\pi \beta_m}{b} y - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

于是得到方程(1)在自由边条件(5)下的解的简正模式为

$$\eta_{nm} = A_{nm} \varphi_{nm}(x, y) \sin(\omega_{nm} t + \delta_{nm}), \quad (18)$$

通解为(18)式的线性组合. 由此可看到, 当

$$\delta_{nm} = 2k\pi, \quad k=0, 1, 2, \dots;$$

$$A_{nm} \varphi_{nm}(0, 0) = A; \quad \omega_{nm} = \omega_0 \quad (19)$$

时, 可得到一系列的简正振动:

$$\eta_{nm}(x, y, t) = A_{nm} \varphi_{nm}(x, y) \sin \omega_{nm} t, \quad (20)$$

故有  $k = \omega_0 / u = \gamma$ . 此时  $\varphi_{nm}(x, y) = 0$  的位置就是共振驻波波节线的位置. 注意

$$k^2 = k_{xn}^2 + k_{ym}^2 = \left( \frac{\pi \beta_n}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi \beta_m}{b} \right)^2, \quad (21)$$

有波速

$$u = \frac{\omega_0}{k} = \frac{2f}{\sqrt{\left( \frac{n+\frac{1}{2}}{a} \right)^2 + \left( \frac{m+\frac{1}{2}}{b} \right)^2}} = \sqrt{2\pi f c}, \quad (22)$$

$c$  见式(1),为常量.由式(22)知,薄板为频散媒质,波速(即相速)随频率  $f$  变化而变化.对方形板, $a=b$ ,波速可表示为

$$u = \frac{2af}{\sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2}}. \quad (23)$$

于是可在实验上分别数出  $x, y$  方向某一频率  $f$  下共振时的克尼拉图形中的波节数  $n+1, m+1$ ,代入式(22)或式(23),即可求出波速  $u$ .

### 3 实验结果与分析

实验选取  $a=b=200$  mm,厚度  $2h=1$  mm 的黄铜板,振动源采用压电陶瓷蜂鸣片.结果如表 1 所示.  $x$  方向的波节数为  $n+1$ ,  $y$  方向的波节数  $m+1$ .可见,在各种频率下,测出常量  $c$  的平均值  $\bar{c}$  为  $0.985$  m<sup>2</sup>/s.铜板的质量体密度  $\rho=8.10 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,注意对于黄铜,  $s=0.324$ ,由  $Q=3\bar{c}^2\rho(1-s^2)/h^2$  可求出薄铜板的弹性模量为  $Q=8.44 \times 10^{10}$  kg/(m·s<sup>2</sup>).进一步求出  $|c_{\max} - c_{\min}|/\bar{c}=0.112$ ,可见,  $c$  比较稳定,与理论比较符合.实验上还可以与其他测量弹性模量的方法<sup>[7-8]</sup>进行比较,在此暂不讨论.

表 1  $xy$  方向波节数不同时的波速

$f/\text{kHz}$	$n+1$	$m+1$	$u/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$c/(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$
2.821	8	5	129.0	0.939
4.154	10	5	158.1	0.957
5.292	9	8	186.7	1.049
6.820	11	9	201.9	0.952
12.038	15	10	277.8	1.020
13.514	15	13	282.4	0.939
14.408	17	10	302.7	1.012
17.456	18	12	333.4	1.014

由于铜板为正方形,  $a=b=200$  mm,由对称性,若仔细调节振动源的频率,可使  $x, y$  方向的波节数相等,即  $n+1=m+1=l+1$ ,式(23)可简化为

$$u = \sqrt{2}af / \left(l + \frac{1}{2}\right), \quad (24)$$

相应的实验结果如表 2 所示,与理论也比较符合.

表 2  $xy$  方向波节数相同时的波速

$f/\text{kHz}$	$n+1$	$m+1$	$u/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$c/(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$
11.567	12	12	284.4	1.113
12.600	13	13	285.1	1.027
15.620	16	16	285.0	0.827
18.163	18	18	293.5	0.755

### 4 进一步的分析与讨论

以上是振动源在角落  $O(0,0)$  的情形.对振动源在铜板的任何位置  $O'(a_1, b_1)$  ( $0 < a_1 < a, 0 < b_1 < b$ ) 的情形,类似前面,同样可以求解出其简正模式为:

$$\eta_{mn} = A_{mn}\varphi_{mn}(x, y)\sin(\omega_{mn}t + \delta_{mn}), \quad (25)$$

存在振动源  $O'(a_1, b_1)$  时,需满足

$$\eta|_{x=a_1, y=b_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}\varphi_{mn}(a_1, b_1)\sin(\omega_{mn}t + \delta_{mn}) = A\sin\omega_0t, \quad (26)$$

当

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= 2k\pi, \quad k=0, 1, 2, \dots; \\ \omega_{mn} &= \omega_0, \quad A_{mn}\varphi_{mn}(a_1, b_1) = A \end{aligned} \quad (27)$$

时,仍有一系列的简正振动

$$\eta_{mn}(x, y, t) = A_{mn}\varphi_{mn}(x, y)\sin\omega_{mn}t, \quad (28)$$

此时将发生共振,在  $xy$  平面上也可产生二维驻波波形,即克拉尼图形.对比式(28)和式(20)可知,不论振源在平板上的哪个位置,只要频率不变,克拉尼图形的波节(或波幅)的位置都相同,只是振幅发生改变.振幅需满足

$$A_{mn}\varphi_{mn}(a_1, b_1) = A, \quad (29)$$

其他如波矢  $k$ 、波速  $u$  等均不变.

实验观测克拉尼图形,振源难以严格放在  $a_1=0, b_1=0$  的位置,故实际上都是  $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ .实验装置如图 2 所示,左边为有一支撑杆支撑的薄黄铜板,支撑杆靠近左下角,板上洒有白色细沙,板的底面中心附近贴有蜂鸣片,蜂鸣片通过导线与右边的 DDC 函数信号发生器的信号输出端相连.图 3 所示为实测的  $n+1=15, m+1=10$  的二维驻波图,对应频率为  $12.038$  kHz.图 4 为由

式(20)得出的数值模拟图,两者符合得很好. 其中颜色越浅表示振幅越小,颜色越深振幅越大. 振幅为零代表波节的位置,即图3中细沙集中的位置. 由于共振时驻波的波节位置不变,仍可应用式(18)~(23),读出 $x, y$ 方向的波节数 $n+1, m+1$ ,即可算出波矢 $k$ ,从而求出波速 $u$ 及弹性模量 $Q$ 等物理量.



图2 实验装置图

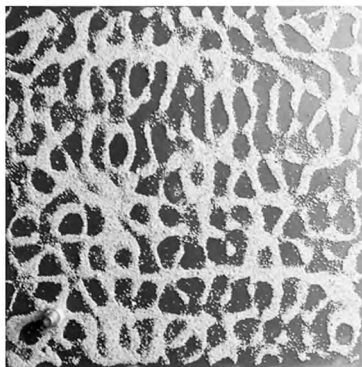


图3  $n+1=15, m+1=10$  时的二维驻波图

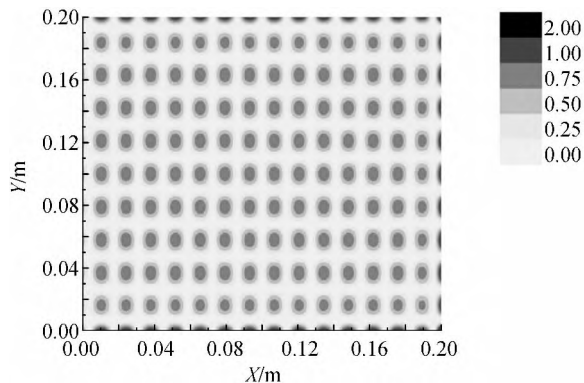


图4  $n+1=15, m+1=10$  时的数值模拟图

### 参考文献:

- [1] 戴玉蓉. 预备物理实验[M]. 南京: 东南大学出版社, 2011.
- [2] 梁振华. 声音震碎酒杯实验[J]. 物理实验, 2011, 31(9): 16-18.
- [3] 王继超, 王慧. Chladni 图案的 Matlab 模拟[J]. 实验科学与技术, 2011, 9(2): 181-183.
- [4] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程·力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 162-205.
- [5] P M 莫尔斯, K U 英格特, 著. 理论声学(上册)[M]. 吕如榆, 杨训仁, 译. 北京: 科学出版社, 1984: 212-218, 252-253.
- [6] 王龙甫. 弹性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1978: 339-340.
- [7] 吴一, 郭昶, 邹永丰, 等. 基于叠栅条纹测量材料的弹性模量[J]. 物理实验, 2013, 33(3): 46-48.
- [8] 李柱峰, 徐秀平. 双光栅弹性模量测量实验方法[J]. 物理实验, 2013, 33(1): 20-22.

## Research of 2-dimensional standing waves in square plate

FANG Yi-zhong, WANG Gang, SHEN Han, CUI Xin-tu, LIAO De-ju, FENG Rao-hui  
(School of Physics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** 2-dimensional standing waves in square plates (Chladni figures) in several cases was studied both experimentally and theoretically. Wave nodes and wave vector of the standing wave figures were gotten at different frequency, and the wave velocity was deduced. The results of the experiment agreed well to the analytic solutions of theory.

**Key words:** standing wave; eigen vibration; Chladni figures

[责任编辑:郭 伟]