

物理学中的绝热不变量及实验设计

李岸阳¹, 王雨雷², 魏雅利³

(1. 中核清原环境技术工程有限责任公司, 北京 100037;

2. 中国科学技术大学 近代物理系, 安徽 合肥 230026; 3. 北京市 5111 信箱, 北京 100094)

摘要: 以变摆长单摆和变参量 LC 振荡电路等简单实验为例, 分析并讨论了在这些准周期系统中, 绝热不变量的存在、测量、性质以及重要意义。

关键词: 绝热不变量; 准周期系统; 单摆; LC 振荡电路

中图分类号: O551 文献标识码: A 文章编号: 1005-4642(2014)08-0034-04

1 引言

绝热不变量是近代物理学中的重要概念。其产生背景可追溯到 1911 年索尔维 (Solvay) 会议^[1]。当时在讨论量子力学问题期间, 洛仑兹提出了一个看似简单的问题, 即当单摆的周期缓慢变化时, 其振幅如何变化。爱因斯坦第一个回答了这个问题, 并提出了绝热不变量概念。

简谐振子等周期问题是物理学中少有的几个能够被严格解析解决的问题。然而, 真实世界中, 严格的周期系统并不存在。大部分我们熟知的周期系统, 如行星公转、水波传播、心率等都不严格。它们实际是具有近似周期行为的准周期系统。在研究准周期系统时, 一方面周期的严格定义需要重新被考虑, 如何准确描述准周期系统的长时间演化成为一个极富实践意义的问题。另一方面, 在周期性系统中存在的守恒量在准周期系统中并不严格成立, 这大大增加了对准周期系统进行研究的难度。绝热不变量的提出使我们找到了准周期系统中相对应的“守恒量”, 具有重要意义。在许多情况下, 绝热不变量并不被广泛认识, 绝热不变量和近似不变量之间经常被混淆。

总的来说绝热不变量与近似不变量的差别在于物理量在长时间时的性质。由于准周期系统的参量一般都随时间缓慢变化, 因此许多相应物理量也随时间缓慢变化, 在很长时间后由于不断积累, 该物理量会变化很大, 这就是近似不变量的概

念。而绝热不变量在短时间内变化可能和近似不变量同一量级, 但经过很长时间后, 绝热不变量的变化仍然很小。

本文拟从绝热不变量的定义出发, 详细阐释其性质与重要意义。通过设计简单的准周期系统物理实验, 可以测定系统中的绝热不变量, 从而加深对绝热不变量性质的理解。

2 准周期系统中的绝热不变量

周期系统不变量的研究在物理领域有着基本的意义。几乎所有的系统都可以转化为周期系统进行考虑, 如通过傅里叶变换等方法将一个复杂的函数分解为不同周期性的正弦函数, 从频域角度分析问题。周期系统不变量反映了系统的对称性, 这不仅可以简化物理问题, 而且能够帮助人们抓住问题的物理本质, 加深对相关系统的理解。

理想谐振子为周期系统, 其哈密顿量为^[2]

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2), \quad (1)$$

其中, $p = mv$, 为广义动量, $q = x$, 为广义坐标, $\omega = \sqrt{k/m}$ 为谐振子振荡频率, m 为谐振子质量, k 为弹簧弹性系数。根据哈密顿正则方程, 可知 p 和 q 都不是守恒量, 该系统的守恒性质不明确。通过正则变换

$$p = m\omega q \cot Q, \quad (2)$$

$$P = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}, \quad (3)$$

收稿日期: 2014-03-31; 修改日期: 2014-06-13

作者简介: 李岸阳(1983-), 男, 吉林长春人, 中核清原环境技术工程有限责任公司初级工程师, 硕士, 从事原子核物理、激光测速、半导体物理方面的研究工作。

方程(1)形式上变为

$$H = \omega P. \quad (4)$$

由于 H 不显函 Q , 变换后的动量, $P = H/\omega$, 为守恒量. 这个守恒量不仅揭示了理想谐振子系统的本质属性, 而且它可以很自然的推广到其他的大部分周期系统中. 因此守恒量的意义可见一斑.

周期系统具有严格固定的频率及相应的守恒量, 然而实际的物理问题中, 理想的周期系统是不存在的. 对于非周期系统, 宏观意义上的“频率”、“相位”等概念都变得模糊不清, 大部分系统只能从微观意义上定义“瞬时频率”. 为了简化问题, 考虑瞬时频率随时间演化相对极慢的系统, 即

$$\frac{1}{\omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} \sim O(\epsilon), \quad (5)$$

其中, $\omega(t)$ 为系统瞬时频率. 这种系统称为绝热系统, 其随时间的演化就是绝热演化过程. 从物理意义上来说, 绝热系统比周期系统更贴近物理实在, 因此, 此系统守恒量的研究也就极为重要. 绝大多数绝热系统存在 3 种不变量: 守恒量、近似不变量和绝热不变量. 守恒量就是严格不含时的物理量, 然而, 近似不变量和绝热不变量很容易混淆, 他们的区别就是长时间性质不同.

近似不变量定义为: 在时间区间 $0 < t < O(1/\epsilon)$ 内, 如果含时物理量 $A(t)$ 的增量 $\Delta A = A(t) - A(0) \sim O(\epsilon)$, 则物理量 A 称为近似不变量. 该定义指出, 近似不变量只能保证“较短”时间内“不变”, 然而如果时间很长, 其增量可以很大. 比如, 物体以极小的速度 $v \sim O(\epsilon)$ 做匀速直线运动, 短时间内, 即 $0 < t < O(1/\epsilon)$, 可以认为该物体的位置没有变化, 但是如果 $t \sim O(1/\epsilon^n)$, $n \gg 1$, 那么, 物体的位置就会变化很大. 另一个重要的近似不变量是由 V. I Arnold 给出的^[3]. 考虑的系统哈密顿量为

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + \omega(t) \frac{q^2}{2}, \quad (6)$$

其中, $\omega(t)$ 满足式(5). 定义物理量

$$A(s) = \int_{t=s}^{t=s+\frac{2\pi}{\omega}} p_s(t) dq_s(t), \quad (7)$$

其中, 参量 $s > 0$, $p_s(t)$ 和 $q_s(t)$ 满足方程

$$H_s = \frac{p_s^2}{2} + \frac{q_s^2}{2} \omega^2(s), \quad (8)$$

方程(8)实际就是以 $t=s$ 时刻的 $\omega(s)$ 为固定频率的哈密顿量, 方程(7)则定义了瞬时周期和相应的作用量. Arnold 证明, 如果 $0 < s < O(1/\epsilon)$, 那么

$[A(s) - A(0)] \sim O(\epsilon)$, 即 $A(s)$ 为近似不变量.

绝热不变量的定义与近似不变量相似, 但是绝热不变量没有时间上的限制, 即对任意时刻 t , 如果物理量 $A(t)$ 的增量 $\Delta A = A(t) - A(0) \sim O(\epsilon)$, 则该物理量就是绝热不变量^[4]. 近似不变量与绝热不变量的性质可以通过图 1 来定性说明. 图 1 中 A_1 为近似不变量, A_2 为绝热不变量, 经过长时间后, A_1 变化可能很大, 而 A_2 与 $t=0$ 时刻相差仍为一阶小量.

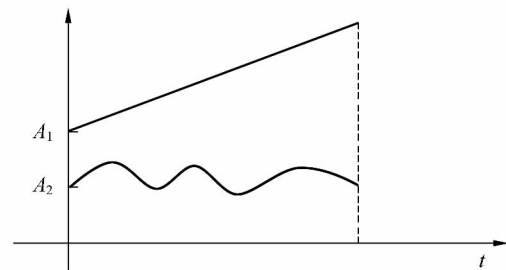


图 1 近似不变量与绝热不变量的对比

3 变摆长单摆的绝热不变量

单摆是物理学中的非常简单的问题, 在物理实验和教学领域, 单摆被广泛关注^[5-7]. 但如果单摆的摆长随时间改变, 那么系统运动的求解就变得很复杂^[1]. 如果单摆的摆长绝热演化, 单摆就变成了绝热系统, 在该系统中存在绝热不变量.

变摆长单摆实验装置如图 2 所示. 摆长为 l , 牵引装置 A 的转盘半径为 R , 角速度为 ω_r , 要求 ω_r 满足绝热条件

$$\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} = \frac{R\omega_r}{l} \sim O(\epsilon), \quad (9)$$

摆线与木板 B 的孔 O 的摩擦可以忽略, 小孔经过抛光、润滑等处理, θ 为摆线与垂直线的夹角, 为了保证单摆条件, 要求整个过程中 $\theta < 10^\circ$, 由于摆幅与转盘速度相关, 因此, 实验中可以通过人为调整转速来达到单摆条件.

固定摆长单摆系统的拉氏量为

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\theta} l)^2 + mgl \cos \theta, \quad (10)$$

利用拉格朗日方程和单摆条件易得运动方程为

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = 0, \quad (11)$$

其中, $\Omega = \sqrt{g/l}$, g 为重力加速度, 近似为常量.

对于变摆长单摆, 方程(11)可写为

$$\ddot{\theta} + \Omega^2(t) \theta = 0. \quad (12)$$

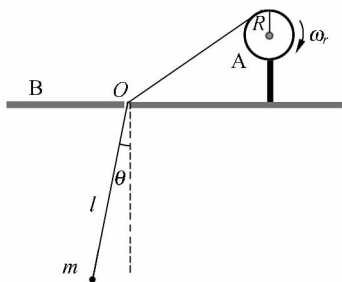


图 2 变摆长单摆实验装置示意图

其中, $\Omega = \sqrt{g/l(t)}$. 方程(12)为变频率的谐振子方程, 由于 $l(t)$ 满足(9)式, 显然有

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \sim O(\epsilon), \quad (13)$$

满足绝热条件.

设 $w(t)$ 为任意含时物理量, $w(t)$ 满足方程

$$\ddot{w} + \Omega^2(t)w = \frac{1}{w^3}, \quad (14)$$

可以通过方程(12)和(14)得到该变摆长单摆系统的一个守恒量^[1, 4],

$$I = \left(\frac{\theta}{w}\right)^2 + (w\dot{\theta} - \dot{w}\theta)^2. \quad (15)$$

可以很容易验证 $dI/dt = 0$. 考虑到 $\Omega(t)$ 随时间变化很慢, 可以将其重参量化为 $\Omega = \Omega(T)$, 其中 $T = \epsilon t$. 方程(14)形式上变为

$$\epsilon^2 \frac{d^2 w}{dT^2} + \Omega^2(T)w = \frac{1}{w^3}, \quad (16)$$

令 $w = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$, 逐级求解方程(16), 可得^[4]

$$w = \Omega^{-1/2} + O(\epsilon^2), \quad (17)$$

$$\dot{w} = O(\epsilon). \quad (18)$$

基于 I 定义一个新的守恒量

$$I_p = \frac{m}{2} I = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\theta}{w}\right)^2 + (w\dot{\theta} - \dot{w}\theta)^2 \right], \quad (19)$$

将(17)式和(18)式代入(19)式, 可以得到

$$I_p = \frac{m}{2\Omega} (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \theta^2) + O(\epsilon). \quad (20)$$

定义 $p = m\dot{\theta}l$, $q = \theta l$, 系统的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2m} [p^2 + m^2 \Omega^2(t) q^2] = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \theta^2), \quad (21)$$

定义物理量

$$A_p = \frac{H}{\Omega l^2} = \frac{m}{2\Omega} (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \theta^2), \quad (22)$$

对比(20)和(22)式易得

$$A_p = I_p + O(\epsilon), \quad (23)$$

考虑到 I_p 为守恒量, 因此, 在任意 t 时刻, 有

$$[A_p(t) - A_p(0)] \sim O(\epsilon), \quad (24)$$

因此, A_p 为变摆长单摆系统的绝热不变量.

利用图 1 所示的装置, 可以通过实验来验证 A_p 为绝热不变量. 考虑到单摆系统处在保守势场中, 并且广义坐标 p 和 q 不显含时间, 所以哈密顿量为单摆的能量, 即 $H = E$. 为了减小测量误差, 可以通过测量最大摆角 θ_{\max} 来得到能量, 即

$$H = E = mgl(1 - \cos \theta_{\max}). \quad (25)$$

设初始时刻摆长为 l_0 , t 时刻装置 A 转过的角度为 Φ , 因此有

$$l(t) = l_0 - R\Phi. \quad (26)$$

利用(22), (25), (26)式和 $\Omega(t) = \sqrt{g/l(t)}$, 可得

$$A_p(t) = m \sqrt{\frac{g}{l_0 - R\Phi(t)}} [1 - \cos \theta_{\max}(t)]. \quad (27)$$

因此, 待测量为 $\Phi(t)$ 和 $\theta_{\max}(t)$, 通过测量不同时刻的 A_p 就可以明确看出 A_p 的绝热不变性. 应该注意的是, 本实验要求全过程满足单摆条件, 即 $\theta < 10^\circ$, 对摆长没有限制.

4 变参量 LC 回路的绝热不变量

LC 回路是电学中简谐振荡的重要实例, 如图 3 所示, 为了保证回路能量损失较小, 电感 L 与电容 C 都比较大, 灵敏电流计的电阻极小, 电压表电阻极大. 最简单的情况下, 认为电感与电容不变, 这种理想情况下电流 i 满足的方程为

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \Omega_{LC}^2 i = 0, \quad (28)$$

其中, $\Omega_{LC} = \sqrt{1/LC}$. 此方程与方程(12)形式完全相同. 现在假设电容或电感绝热演化, 即

$$\frac{\dot{\Omega}_{LC}}{\Omega_{LC}} \sim O(\epsilon), \quad (29)$$

仍然利用方程(14)获取 LC 回路的守恒量

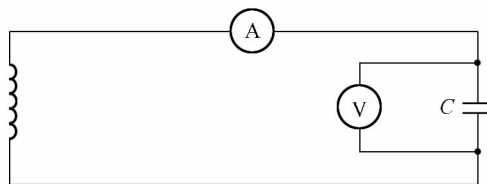


图 3 LC 回路实验示意图

$$I' = \left(\frac{i}{w}\right)^2 + \left(w \frac{di}{dt} - \frac{dw}{dt} i\right)^2, \quad (30)$$

进一步,利用(16)~(20)的思路,可以得到

$$I' = \frac{1}{\Omega_{LC}} \left[\left(\frac{di}{dt}\right)^2 + \Omega_{LC}^2 i^2 \right] + O(\epsilon), \quad (31)$$

定义物理量

$$A_{LC} = (V^2/L^2 + \Omega_{LC}^2 i^2)/\Omega_{LC}, \quad (32)$$

其中 V 为电压表读数. 利用电感定律 $V = -L di/dt$, 对比(31)和(32)式容易看出

$$A_{LC}(t) = I' + O(\epsilon). \quad (33)$$

考虑 I' 为守恒量, 因此对任意时刻 t , $A_{LC}(t)$ 满足

$$[A_{LC}(t) - A_{LC}(0)] \sim O(\epsilon), \quad (34)$$

A_{LC} 为绝热不变量.

实验上通过绝热地控制电容和电感的大小, 就可以构造出绝热过程. 绝热不变量 A_{LC} 可以通过电容、电感、电压和电流的读数测得, 将 $\Omega_{LC} = \sqrt{1/LC}$ 代入式(32)有

$$A_{LC}(t) = \sqrt{\frac{1}{LC}} \left(\frac{V^2 C}{L} + i^2 \right). \quad (35)$$

通过测量不同时刻 A_{LC} , 可验证绝热不变的性质.

5 结束语

讨论了准周期系统中的绝热不变量. 以变摆

长单摆和 LC 回路 2 个物理系统为例, 分别证明

和获得了相应的绝热不变量, 并提供了实验上进行测量的思路和方法. 2 个例子都是含时谐振子方程的具体表象, 大部分物理系统都可以利用含时谐振子方程研究, 其绝热不变量可以反映大多数物理系统的“近似”守恒性质, 因此, 尽管这 2 个实例计算绝热不变量的过程并不复杂, 但是, 其揭示的物理意义是非常基本和重要的, 对于理解复杂物理系统是很有帮助的.

参考文献:

- [1] Kulsrud R M. Adiabatic invariant of the harmonic oscillator [J]. *Physical Review*, 1957, 106(2): 205.
- [2] Goldstein H, Poole C, Safko J. 经典力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005: 377-379.
- [3] Arnold V I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics* [M]. New York: Springer Press, 1989.
- [4] Qin H, Davidson R C. An exact magnetic-moment invariant of charged-particle gyromotion [J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(8): 085003.
- [5] 秦鸣雷, 肖一凡, 杨海亮, 等. 大角度下阻尼对单摆摆动周期的影响[J]. *物理实验*, 2012, 32(5): 42-45.
- [6] 张虹雪, 陈雪芹, 樊婷, 等. 单摆摆球运动轨迹控制装置[J]. *物理实验*, 2013, 33(12): 36-38.
- [7] 蔡霞, 吴先球. 基于虚拟仪器实现单摆法测量重力加速度[J]. *物理实验*, 2012, 32(8): 28-29.

Adiabatic invariant in physics and experimental design

LI An-yang¹, WANG Yu-lei², WEI Ya-li³

(1. CNNC Everclean Environmental Technology Engineering Co. Ltd, Beijing 100037, China;

2. Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China,

Hefei 230026, China; 3. P. O Box 5111, Beijing 100094, China)

Abstract: The existence, measurement, properties and significance of invariants in some simple physics experiments were analyzed and discussed, such as simple pendulum with varying pendulum length and LC circuit with varying parameters.

Key words: adiabatic invariant; quasi-periodic system; simple pendulum; LC circuit

[责任编辑:郭伟]