



集
锦

准稳态问题的热流密度分析

罗宏

(苏州科技学院数理学院, 江苏苏州 215009)

摘要: 已知热流密度线路径, 使用简单的代数及积分运算, 推导出了准稳态下热流密度函数、温度场函数以及导热系数的表达式, 计算了准稳态下长的空心圆柱体中的温度场函数和导热系数表达式。

关键词: 准稳态; 热流密度; 温度场; 导热系数; 对称性

中图分类号: O551.3 文献标识码: A 文章编号: 1005-4642(2014)09-0036-03

1 引言

热传导的准稳态过程广泛存在于自然界。在耗能领域, 准稳态模型被用在热传导的建模研究中, 达到提高热效率, 充分利用能源的目的^[1-2], 或减小热能损失, 节约能源的目的^[3-4]。由于效率和精度上的优点, 在材料的物性测量中准稳态亦有较多的应用^[5-8]。关于温度场分析, 也可以应用准稳态的模型^[9-10]。准稳态问题常用的理论分析方法是解含有特定边界条件和初始条件的热传导微分方程

$$\frac{\partial t(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau} - \alpha \nabla^2 t(\mathbf{r}, \tau) = f(\mathbf{r}, \tau), \quad (1)$$

需用到偏微分方程、傅里叶分析等数学工具, 过程较复杂^[11]。文献[12]分析了第二类边界条件下的无限大平行平板中的准稳态热传导过程。本文则讨论了由对称性可知物体热流密度线分布的情况下, 如何求出热流密度沿热流密度线变化的函数, 再由热流密度函数得到物体内的温度场函数及导热系数公式。这种方法简单、直观、效率较高、物理概念清晰。以下假设在各向同性的均匀介质中, 导热系数 λ 、比热容 c 和材料密度 ρ 不随温度变化。

2 方法介绍

一受热物体, 如果表面各处热流密度恒定, 物体内部热源的发热效率恒定, 则此物体存在准稳态热传导过程^[13]。准稳态下, 由于物体中各处温升

速度相同^[5, 13], 则温度梯度不随时间变化, 由傅里叶定律

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla t(\mathbf{r}, \tau) \quad (2)$$

可知, 物体各点的热流密度不随时间变化。沿着热流密度的方向前进, 会在物体内部得到一条曲线, 本文称之为热流密度线。由以上分析, 准稳态物体中的热流密度线是固定不动的。只要知道了物体中热流密度线的分布, 则可以推出热流密度沿热流密度线的变化。现假设已经知道了热流密度沿热流密度线的变化, 则可由(2)式的变形式

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial s}, \quad (3)$$

沿热流密度线上起点 c 到任一点 x 积分, 就可得到 x 点的温度

$$t(x) = -\frac{1}{\lambda} \int_c^x q ds + t(c), \quad (4)$$

由此得到沿热流密度线的温度场分布。式中 s 为沿热流密度线的自然坐标。同时, 如果测得热流密度线首尾两端的温度差, 沿整条热流密度线积分, 就可以得到导热系数的表达式为

$$\lambda = \frac{\int_c^e q ds}{t(c) - t(e)}, \quad (5)$$

式中 c 点、 e 点分别代表热流密度线的首尾两端, 分母中的温度差在准稳态下为常量。由此推得温度场函数和导热系数的表达式。以下说明已知热流密度线的空间分布, 计算热流密度 $q(x)$ 的方法。

假设热流密度线的路径为已知。则如图1所

收稿日期: 2014-06-18; 修改日期: 2014-10-08

资助项目: 江苏省重点建设教材项目及学校教改项目; “苏州科技大学教学质量工程”项目(No. 601412101)

作者简介: 罗宏(1975—), 男, 四川自贡人, 苏州科技学院数理学院实验师, 硕士, 主要从事物理实验教学及力学、量子物理领域的研究。

示,取体系中任意一条热流密度线 cxe ,首尾两端 c 点和 e 点的热流密度已知(通常此二点位于物体表面). c 点热流密度为 q_c , e 点热流密度为 q_e . 以 cxe 为边,在其附近取一微小柱体,使热流密度线不穿过柱体表面,柱体表面都由热流密度线构成,则此微小柱体就像一个管道,热量在其中流动,管道内外没有热量交换,本文中称这样的柱体为热流管道. c 点处,垂直于 cxe 的截面(即等温面),面积为 A_1 ; x 点处的等温截面面积为 A_2 ,热流密度设为 $q(x)$; e 点处等温截面面积为 A_3 . 由于此管道极细,则各截面上的热流密度即为 cxe 线上对应点的热流密度. A_1 与 A_2 之间的体积为 V_1 ,其内部热源发热效率为 Q_1 . A_2 与 A_3 之间的体积为 V_2 ,其内部热源发热效率为 Q_2 . 发热效率以流入物体为正,热流密度按图示方向为正. 以下求 $q(x)$.

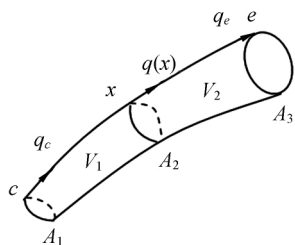


图 1 热流管道微元

由比热容的定义

$$\Delta Q = cm\Delta t, \tag{6}$$

及能量守恒定律,在 V_1 内,流入的净热量决定升高的温度

$$q_c A_1 + Q_1 - q(x) A_2 = c\rho V_1 \Delta t, \tag{7}$$

式中 ρ 为材料的密度, Δt 为单位时间内 V_1 升高的温度. 同理在整个柱体内有

$$q_c A_1 + Q_1 + Q_2 - q_e A_3 = c\rho(V_1 + V_2) \Delta t, \tag{8}$$

由于准稳态下物体内部各处温升速度相同,所以上两式中 Δt 相同. 从两式中消去 Δt 可得到 $q(x)$

$$q(x) A_2 = q_c A_1 \frac{V_2}{V_1 + V_2} + q_e A_3 \frac{V_1}{V_1 + V_2} + Q_1 \frac{V_2}{V_1 + V_2} - Q_2 \frac{V_1}{V_1 + V_2}, \tag{9}$$

由于热流密度线的空间分布为已知,式中 A_1, A_2, A_3, V_1, V_2 为已知的几何量. q_c, q_e, Q_1, Q_2 为流入(流出)系统的热量或由边界条件决定的量,也是已知量. 这样就得到了热流密度线 cxe 上任一点

x 处的热流密度. (9)式中等号左侧表示由 A_2 面流入体积 V_2 的热量,它等于右侧诸项之和. 右侧第一项中 $q_c A_1$ 是由 A_1 面流入的热量, $\frac{V_2}{V_1 + V_2}$ 则是这部分热量分配到 V_2 中的部分. 由于准稳态下物体各处温升速度相同,所以流入物体的热量均匀分配到物体中. 其余各项亦类似. 容易验算,此热流密度保证了 V_1 和 V_2 的温升速度相同,这正是准稳态的特征. 由(9)式得到 $q(x)$,再将其代入(4)和(5)式,就可得到物体内的温度分布函数和导热系数的表达式. 利用此方法,容易计算出无限大平行平板中的热流密度、温度场及导热系数的表达式,结果与文献[5, 12]的吻合. 此处限于篇幅不再赘述.

3 示例:长的空心圆柱体

以满足第二类边界条件、准稳态下的长空心圆柱体为例,来说明如何运用以上方法求温度分布及导热系数. 文献[6]中正是使用这样的测量系统.

长空心圆柱体内径为 r ,外径为 R ,其长度远远大于其外径. 其内表面有外加热源,热流密度 q_c 垂直内表面指向圆柱体内部. 外表面用绝热材料包裹,热流密度为零. 讨论圆柱体中段的一小部分,可以将其近似为无限长圆柱体. 由对称性知,热流密度线沿圆柱体的径向,其等温面为圆柱体的同心圆柱面. 图 2 所示为任一横截面. 在柱体内取一楔形块,图中 $c_1 e_1 e_2 c_2$ 为此楔形块在截面上的投影,高度设为 h ,夹角为 θ . 由以上对称性分析知,没有热流密度线穿过楔形块表面,此楔形块为一热流管道. 在半径为 x 的位置,应用(9)

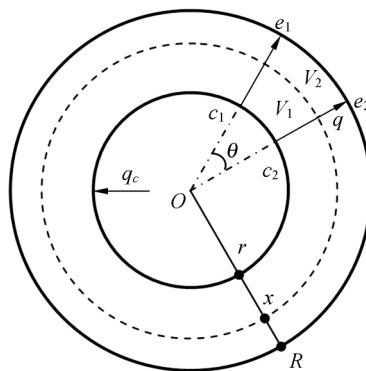


图 2 无限长圆柱体截面图

式. 由于外表面用绝热材料包裹, 热流密度 $q_e = 0$. 柱体内没有热源, $Q_1 = Q_2 = 0$. 内表面热流密度为外加热源 q_c . 将坐标原点选在圆心, 其对应的几何量为 $V_1 + V_2 = \frac{\theta}{2}(R^2 - r^2)h$, $V_2 = \frac{\theta}{2}(R^2 - x^2)h$, $A_1 = r\theta h$, $A_2 = x\theta h$. 将以上各式代入(9)式, 整理得:

$$q(x) = \frac{q_c r}{R^2 - r^2} \left(\frac{R^2 - x^2}{x} \right), \quad (10)$$

此为空心圆柱体内半径为 x 的圆面上的热流密度. 将(10)式代入(4)式, 沿径向积分就得到柱体内的温度分布

$$t(x) - t(r) = \frac{q_c r}{\lambda} \frac{R^2}{R^2 - r^2} \left(\frac{x^2 - r^2}{2R^2} - \ln \frac{x}{r} \right), \quad (11)$$

此柱体达到准稳态后, 相同半径 x 的圆面上, 温度都相同. 将 $x=R$ 代入(11)式或将(10)式代入(5)式可得

$$\lambda = \frac{q_c r}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} - \frac{R^2}{R^2 - r^2} \ln \frac{R}{r} \right), \quad (12)$$

为长空心圆柱体内的导热系数表达式, 式中 $\Delta t = t(R) - t(r)$ 为内外表面的温度差, 在准稳态下为常量.

4 结束语

热流密度和温度场之间的关系由(2)式的傅里叶定律提出. 由此, 可以由温度场出发, 进而分析热流密度等其他物理量或物理效应. 也可以由热流密度出发来分析. 本文选择后一种方法. 在准稳态下, 物体内部温升速度不随时间变化, 即热流密度不随时间变化, 由时间不变量出发分析问题有其便捷性. 另外, 由热流密度可以直接和能量守恒定律相联系, 为分析解决问题带了了便利. 本文分析准稳态的方法简单直观、效率高. 其缺点是, 需首先由对称性或其他方法得到物体内部热流密度曲线的路径. 对于由对称性分析可以知道物体中热流密度线路径的问题, 可以快速得到其热流密度函数、温度场分布和导热系数的表达式. 对于可以估计热流密度线路径的问题, 则可以对物体内的温度分布、热流密度做初步的评价. 另外, 从这一方法出发, 可以定性分析准稳态下体

系热流以及温度场的一些性质. 对于热物性测量仪器的设计及工程问题中的热流和温度场分析都有帮助.

参考文献:

- [1] Fardoun F, Ibrahim O, Zoughaib A. Quasi-steady state modeling of an air source heat pump water heater[J]. Energy Procedia, 2011(6):325-330.
- [2] Khandekar S, Gautam A P, Sharma P K. Multiple quasi-steady states in a closed loop pulsating heat pipe [J]. International Journal of Thermal Science, 2009,48(3):535-546.
- [3] Wauman B, Breesch H, Saelens D. Evaluation of the accuracy of the implementation of dynamic effects in the quasi steady-state calculation method for school buildings [J]. Energy and Buildings, 2013,65(8):173-184.
- [4] Medina M A. A quasi-steady-state heat balance model of residential walls [J]. Mathematical and Computer Modelling, 1999(30):103-112.
- [5] 郭重雄, 余其铮, 薛洪福. 导热系数和比热准稳态测量方法的分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1984(2):62-72.
- [6] 赵小明, 陆世豪, 顾兆林, 等. 准稳态理论测量溶解热及比热容的实验研究[J]. 西安交通大学学报, 2005,39(9):958-961.
- [7] 周乐平, 王补宣. 准稳态法测量纳米颗粒悬浮液的热物性[J]. 工程热物理学报, 2003,24(6):1038-1039.
- [8] 张红佳, 郭永利, 李正, 等. 真空热流法测定不良导体的导热系数[J]. 物理实验, 2012,32(9):5-7.
- [9] 殷鹏飞, 张蓉, 熊江涛, 等. 搅拌摩擦焊准稳态热耦合过程数值模拟研究[J]. 物理学报, 2013,62(1):1-8.
- [10] 赵福海, 华学明, 叶欣, 等. 热丝 TIG 焊热丝准稳态温度场的解析模型[J]. 上海交通大学学报, 2012,46(7):1063-1068.
- [11] 雷柯夫 A B. 热传导理论[M]. 裘烈钧, 丁履得译. 北京: 高等教育出版社, 1955:55-71, 151-176.
- [12] 罗宏. 用傅里叶定律分析无限大平行平板中的准稳态[J]. 物理实验, 2014,34(8):31-33.
- [13] 胡汉平. 准稳态温度场存在的充要条件[J]. 应用科学学报, 2004,22(1):91-93.

(下转第 41 页)

An improvement on Franck-Hertz experiment

FENG Juan, ZHANG He, ZHAO Fei

(Demonstration Center of Physics Experiment,
China University of Geosciences, Beijing 100083, China)

Abstract: The traditional method of measuring the first excitation voltage of argon atom was improved. Using the “cursor” function, the potential values of the peaks and troughs were read from the oscilloscope directly. This method reduced the reading error, improved the accuracy of measurement, and trained the students’ skills of oscilloscope operation.

Key words: argon atom; excitation voltage; oscilloscope; error

[责任编辑:郭伟]

(上接第 38 页)

Analyzing the quasi-steady state by thermal flux

LUO Hong

(Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

Abstract: The expression of thermal flux, temperature distribution and thermal conductivity under quasi-steady state were derived from the course of thermal flux. The temperature distribution and thermal conductivity of a long hollow cylinder were calculated.

Key words: quasi-steady state; thermal flux; temperature distribution; thermal conductivity; symmetry

[责任编辑:郭伟]

欢迎订阅 欢迎投稿

《物理实验》创刊于 1980 年,是教育部主管、东北师范大学主办的学术期刊,是教育部物理学与天文学教学指导委员会的会刊。

《物理实验》主要刊载物理实验成果,交流物理实验教学改革的新思想、新方法、新动态。开设的栏目有:实验教学,实验与应用,数据处理与误差分析,仪器设计与使用,实验教学研究,基础教育研究,实验技术与技巧,集锦,问题讨论,国外实验教学介绍,学生园地等。适合于物理实验工作者,大、中学校的物理教师,理工科的本科生、研究生及教学仪器研制人员阅读。

《物理实验》愿为广大作者提供交流信息的窗口,展示成果的园地,为广大读者提供丰富的精神食粮,为广大仪器生产厂家提供展示成果的舞台。

《物理实验》杂志为月刊,全国各地邮局均可订阅,邮发代号为 12-44。若错过邮局订阅时间,可直接与编辑部联系。

《物理实验》编辑部