

基础 教育 研究

# 折射成像问题定量研究

莫 滨, 张 靖

(南京市第十八中学, 江苏 南京 210022)

摘 要: 定量地分析了折射时物像之间的位置关系, 讨论了从定点观察垂直分界面的直线物体折射时的虚像方程, 发现该虚像并非是直线, 而是一条有极值点的曲线, 并且将所得到的结果应用于光的折射成像问题.

关键词: 折射; 虚像; 定量分析; 几何光学

中图分类号: G633.7

文献标识码: A

文章编号: 1005-4642(2015)07-0014-05

## 1 折射成像

观察者从空气中向下观察水中物体时的虚像位置, 有 3 种观点: 1) 像在物的上方且偏离观察者处<sup>[1]</sup>; 2) 像在物的上方且偏近观察者处<sup>[2]</sup>; 3) 像在物的正上方<sup>[3]</sup>.

竖直物体成像形状画法也不同, 有仍然竖直的<sup>[4]</sup>, 有图 1 所示倾斜的<sup>[5]</sup>.

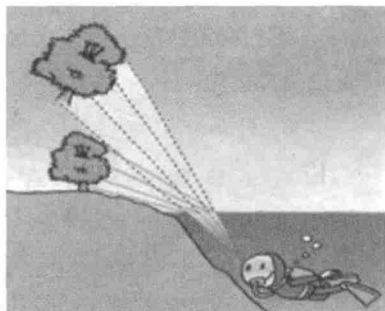


图 1 人教版高中物理教材选修 3-4 画法

文献[6-8]从不同角度定性讨论了成像的正确位置, 都采用 2 束折射光线反向延长线相交的方法. 其中文献[8]因 2 束光线角度相差较大, 不符合人眼的实际视域, 反而得出虚像等大的错误结论. 为了得到这个问题的正确结论, 本文采用了适当的数学方法, 确定了像点的位置与观察角的定量关系.

## 2 定量分析

为了得出普遍适用的定量关系, 分析如图 2

所示的斜射的情况.

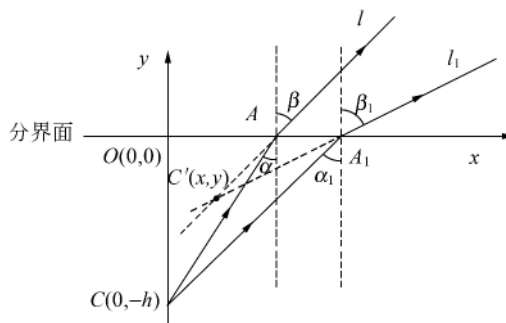


图 2 观察者在光疏介质中观察光密介质物点 C 的成像示意图

光密介质中的物点  $C(0, -h)$  发出的光线在分界面发生折射, 形成过  $A(h \tan \alpha, 0)$  点的折射光线  $l$ , 其直线方程为

$$\frac{y}{x - h \tan \alpha} = \cot \beta. \quad (1)$$

过  $A_1(h \tan \alpha_1, 0)$  点的折射光线  $l_1$ , 直线方程为

$$\frac{y}{x - h \tan \alpha_1} = \cot \beta_1. \quad (2)$$

联立式(1)~(2)求解  $(x, y)$ , 即  $l$  和  $l_1$  的反向延长线交点, 就是物点  $C(0, -h)$  所成的像点  $C'(x, y)$ , 得

$$x = \frac{h \tan \alpha_1 \cot \beta_1 - h \tan \alpha \cot \beta}{\cot \beta_1 - \cot \beta}. \quad (3)$$

根据折射定律,  $\beta$  由  $\alpha$  确定,  $\beta_1$  由  $\alpha_1$  确定. 像点  $C'(x, y)$  最终由  $\alpha$  和  $\alpha_1$  确定. 为了精确地找出像点与  $\alpha$  的关系, 用类似从运动物体平均速度求即

收稿日期: 2014-06-17; 修改日期: 2015-03-25

资助项目: 南京市教育科学“十二五”规划 2013 年度课题(No. L/2013/195); 中国教育学会物理教学专业委员会 2013-2016 年全国物理教育科研重点课题“中学物理实验研究”之阶段性研究成果

作者简介: 莫 滨(1970-), 男, 江苏南京人, 南京市第十八中学高级教师, 硕士, 主要从事中学物理教学和研究工作.

时速度的方法,考虑函数导数的定义,令  $\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha$ ,由式(3)有

$$\begin{aligned}
 x(\alpha) &= \lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha} \frac{h \tan \alpha_1 \cot \beta_1 - h \tan \alpha \cot \beta}{\cot \beta_1 - \cot \beta} = \\
 &= \lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha} \frac{h \tan \alpha_1 \cot \beta_1 - h \tan \alpha \cot \beta}{\alpha_1 - \alpha} = \\
 &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{h \tan (\alpha + \Delta\alpha) \cot \beta (\alpha + \Delta\alpha) - h \tan \alpha \cot \beta (\alpha)}{\Delta\alpha} = \\
 &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{h \frac{(\tan \alpha \cot \beta)'_{\alpha}}{(\cot \beta)'_{\alpha}} \Delta\alpha}{\Delta\alpha} = \\
 &= h \frac{(\tan \alpha \cot \beta)'_{\alpha}}{(\cot \beta)'_{\alpha}}. \tag{4}
 \end{aligned}$$

令图 2 中的相对折射率为  $n$ ,则由折射方程

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n, \tag{5}$$

计算得

$$x(\alpha) = h(n^2 - 1) \tan^3 \alpha. \tag{6}$$

将式(6)代入式(1)可得

$$y(\alpha) = -\frac{h \cos^3 \beta}{n \cos^3 \alpha}. \tag{7}$$

根据折射定律可写为

$$y(\alpha) = -\frac{h}{n} [1 - (n^2 - 1) \tan^2 \alpha]^{\frac{3}{2}}. \tag{8}$$

应用上述结果,用式(6)和式(8)可确定物体坐标为  $(0, -h)$ 、入射角为  $\alpha$  时,折射成像时虚像的坐标,颠覆了采用 2 束光线确定像点的方法.至于只需要确定区域范围的定性分析的应用实例,将具有确定性.

### 3 结果与讨论

研究式(6)~(7)可知,公式对光疏介质向光密介质折射时也同样成立.

1)当  $n > 1$  时,光从光密介质射向光疏介质,由式(6),在  $\alpha$  的取值范围内,有  $0 \leq \alpha \leq \theta_0$  ( $\theta_0$  为临界角),  $0 \leq \tan \alpha \leq \tan \theta_0$ ,对固定的  $h$ ,  $x(\alpha)$  是  $\alpha$  单调增函数.  $x(\alpha) \geq 0$  表示在  $x$  轴方向上,像介于物体和观察点之间,所以像变小.  $x(\alpha)$  是  $\alpha$  单调增函数,最大值为  $x_m = h \tan \theta_0 = h(n^2 - 1) \tan^3 \theta_0$ ,所以得  $\tan \theta_0 = (n^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $x_m = h(n^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ .

从式(7),可知  $y(\alpha) > -h$  且是  $\alpha$  的单调增函数. 有  $\frac{y(\alpha)}{-h} < 1$ ,  $y$  轴方向上像变小.  $y$  的极小值就是像的极大值,这只在  $\alpha = 0$  出现,此时  $y_m =$

$-\frac{h}{n}$ . 物点  $(0, -h)$  对应的像点为  $(0, -\frac{h}{n})$ .

从而得出结论,除了  $(0, 0)$  点之外的物点发出的光由光密介质进入光疏介质中,不论是在  $x$  轴和  $y$  轴方向,像都落在观察者和物体之间,可以认为像变小. 如图 3 所示.

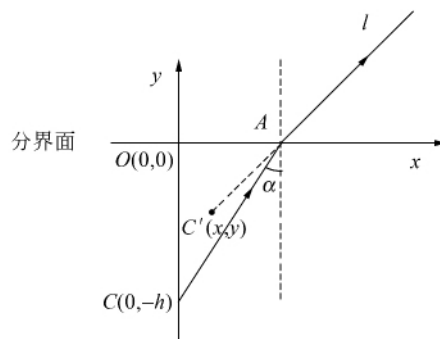


图 3 光密介质向光疏介质折射成像位置示意图

2)当  $n < 1$  时,光是从光疏介质进入光密介质,有  $0 \leq \alpha < 90^\circ$ ,从式(6),  $x(\alpha) \leq 0$ ,表示在  $x$  轴方向上,像变大.  $x(\alpha)$  随  $\alpha$  增大而单调递减.对固定的  $h$ ,由于  $0 \leq \tan \alpha < \infty$ ,所以  $0 \geq x > -\infty$ .

从式(7),得到  $\frac{y(\alpha)}{-h} > 1$ ,表示在  $y$  轴方向上像变大,且有  $y(\alpha)$  是  $\alpha$  的单调减函数.  $y(\alpha)$  的最大值在  $\alpha = 0$ ,即  $\tan \alpha = 0$  时,  $y(0) = -\frac{h}{n}$ ,像最小. 物点  $(0, h)$  对应的像点为  $(0, -\frac{h}{n})$ .

可得出结论,除了  $(0, 0)$  点之外的物点发出的光由光疏介质进入光密介质中,不论是在  $x$  轴和  $y$  轴方向,像都落在观察者和物体之外,像变大,如图 4 所示.

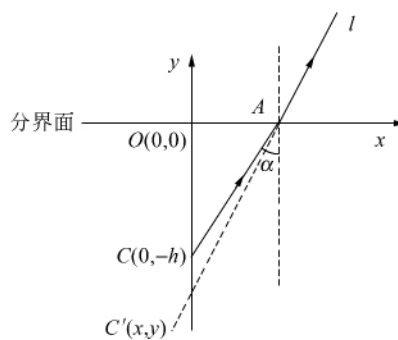


图 4 光疏介质向光密介质折射成像位置示意图

根据式(6),式(7)或式(8)与上面的结论,由于像点与物点的关系,可进一步得出下列结论:

1)物体上特定点对于同一入射角 $\alpha$ (折射角 $\beta$ )只在某方向上成像,即对于特定的观察者,像点唯一.

2)对于物体上的特定点,对不同的入射角,像的位置不同,大小也发生变化.

3)除了(0,0)点之外的物点发出的光由光密介质进入光疏介质中,不论是在 $x$ 轴和 $y$ 轴方向,像都落在观察者和物体之间,成缩小的虚像.

4)除了(0,0)点之外的物点发出的光由光疏介质进入光密介质中,不论是在 $x$ 轴和 $y$ 轴方向,像都落在观察者和物体之外,成放大的虚像.

## 4 应 用

### 4.1 应用 1

用式(6),式(7)或式(8),研究从固定点 $(l, h_1)$ 观察位于 $y$ 轴负方向重合的直线上各点 $(0, -h)$ 所成像点 $(x, y)$ 的情况,以折射角 $\beta$ 为参变量,作图 5.

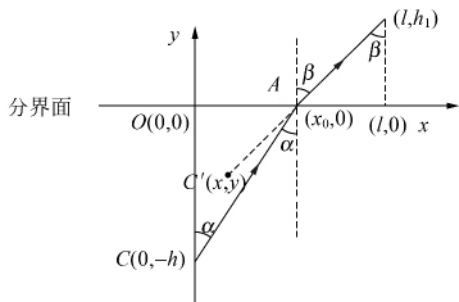


图 5 从定点观察竖直放置的物体

从定点 $(l, h_1)$ 处看点 $(0, -h)$ 所形成的像 $(x, y)$ .  $\alpha$ 为入射角, $\beta$ 为折射角.

$$h = \frac{l - h_1 \tan \beta}{\tan \alpha}, \quad (9)$$

$$x = (n^2 - 1) \frac{l - h_1 \tan \beta}{\tan \alpha} \tan^3 \alpha = \frac{(n^2 - 1)(l - h_1 \tan \beta) \tan^2 \beta}{n^2 + (n^2 - 1) \tan^2 \beta}, \quad (10)$$

$$y = -\frac{h \cos^3 \beta}{n \cos^3 \alpha} = -\frac{1}{n} \frac{l - h_1 \tan \beta \cos^3 \beta}{\tan \alpha \cos^3 \alpha} = \frac{-n^2 (l - h_1 \tan \beta)}{\tan \beta [n^2 + (n^2 - 1) \tan^2 \beta]}. \quad (11)$$

从式(10)和式(11)得到,当在 $(l, h_1)$ 点,折射角为 $\beta$ 时,观察到的点为 $(0, -h)$ ,有

$$h = \frac{l - h_1 \tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{l - h_1 \tan \beta}{\tan \beta} \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \tan^2 \beta}. \quad (12)$$

讨论如下:

1)相对折射率 $n > 1$ 时,光从光密介质中的动点 $(0, -h)$ 射向光疏介质中的固定观测点 $(l, h_1)$ ,所看到的像点为 $(x, y)$ , $\tan \beta$ 的取值范围为

$$0 \leq \tan \beta \leq \frac{l}{h_1}. \quad (13)$$

从式(7)可以得出

$$\frac{y}{-h} < 1. \quad (14)$$

所以,所有的点 $(0, -h)$ 所成像都在 $y$ 轴方向上向观察者移动.

从式(10)可看出,当 $\tan \beta = 0$ 时变至 $\tan \beta = \frac{l}{h_1}$ 时, $x$ 从0逐渐增大,又减小到0,表明 $x$ 有极大值.

如果是从岸上看水中沿 $y$ 轴负方向的直线,均取 $n = \frac{4}{3}$ ,现给出2个例子:1) $l = 1, h_1 = 10$ ; 2) $l = 10, h_1 = 10$ .采用 Excel 软件,绘制图像,如图 6~7 所示.

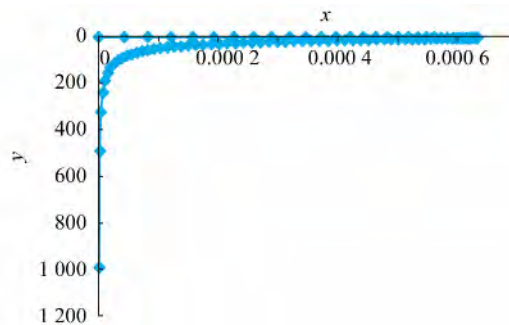


图 6 当 $n = \frac{4}{3}, l = 1, h_1 = 10$ 的像

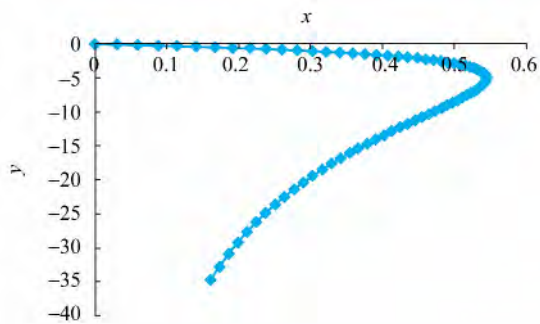


图 7  $n = \frac{4}{3}, l = 10, h_1 = 10$ 的像

从图 6~7 看出,  $\frac{l}{h_1}$  越小, 像的横向偏移越小, 越接近直线, 形成一条有极值点的曲线.

2) 相对折射率  $n < 1$  时, 光从光疏介质中的动点  $(0, -h)$  射向光密介质中的固定观测点  $(l, h_1)$ , 所看到的像点为  $(x, y)$ , 设临界角为  $\theta_0$ , 只能在  $0 \leq \beta \leq \theta_0$  的范围内接收到折射光. 因为  $\tan^2 \beta = \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta} = \frac{n^2 \sin^2 \alpha}{1 - n^2 \sin^2 \alpha}$ , 取  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\sin \alpha = 1$ , 则  $\beta = \theta_0$ ,

$$\tan^2 \theta_0 = \frac{n^2}{1 - n^2}, \quad \tan \theta_0 = \sqrt{\frac{n^2}{1 - n^2}}. \quad (15)$$

注意: 此处临界角的正切的表达形式和前面的表达是不同的, 原因在于, 临界角总是位于光密介质中. 下面分 3 种情况论述:

1) 情况 1. 见图 8,  $\frac{l}{h_1} < \tan \theta_0 = \sqrt{\frac{n^2}{1 - n^2}}$ , 即观察角始终小于临界角, 全部的  $\tan \beta < \tan \theta_0$ , 有

$$0 \leq \tan \beta \leq \frac{l}{h_1} < \sqrt{\frac{n^2}{1 - n^2}}. \quad (16)$$

式(16)给出  $\tan^2 \beta < \frac{n^2}{1 - n^2}$ ,  $n^2 - (1 - n^2) \tan^2 \beta = n^2 + (n^2 - 1) \tan^2 \beta > 0$ , 并有  $l - h_1 \tan \beta \geq 0$ . 从式(10)得出当  $\tan \beta = 0$  和  $\tan \beta = \frac{l}{h_1}$  时, 都有  $x = 0$ , 其他情况下  $x < 0$ , 所以  $x$  有极小值.

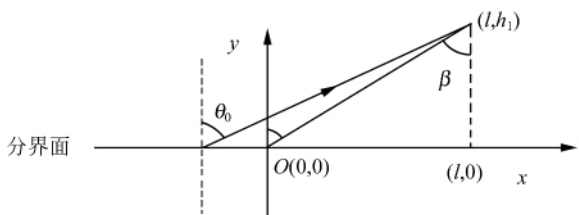


图 8  $\frac{l}{h_1} < \tan \theta_0$

从式(7)可知  $\frac{y(\alpha)}{-h} > 1$ , 所以  $y$  比  $h$  向下移.

例如, 从水中向空气看,  $n = \frac{3}{4}$ ,  $l = 10$ ,  $h_1 = 10$ , 得像  $(x, y)$  的图像, 见图 9.

2) 情况 2. 即观察角最大值等于临界角, 讨论略去. 物体的像的图形与情况(1)中相似.

3) 情况 3. 即观察角最大值大于临界角, 情况更复杂, 讨论略去. 仅给出  $n = \frac{3}{4}$ ,  $l = 10$ ,  $h_1 = 1$ , 由软件得到的像  $(x, y)$  的图像, 见图 10.

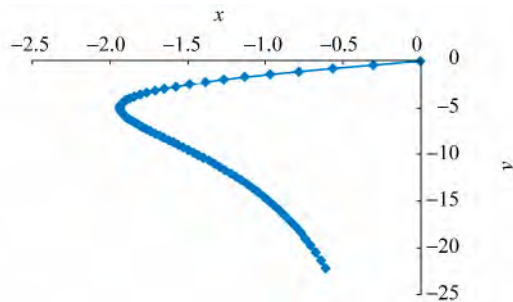


图 9 当  $n = \frac{3}{4}$ ,  $l = 10$ ,  $h_1 = 10$  时的像

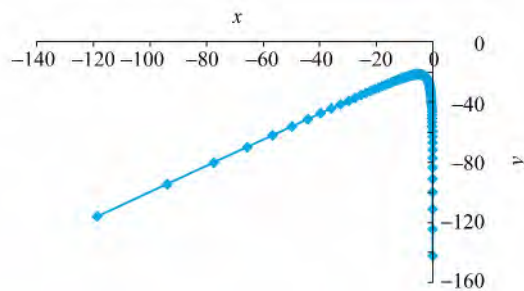


图 10  $n = \frac{3}{4}$ ,  $l = 10$ ,  $h_1 = 1$  的像

由此看出, 从定点观察垂直分界面的直线物体折射时的虚像, 是一条有极值点的曲线. 如果从定点观察不同介质中一般物体的图像, 实际上非常复杂.

#### 4.2 应用 2

如图 11, 由水下点 A 处发出的光以  $30^\circ$  入射角射出水面, 求该点像的位置.

定量法: 直接用式(6)和(8)计算, 得出  $A'$  的坐标为  $(1.497, -4.781)$ , 见图 11.

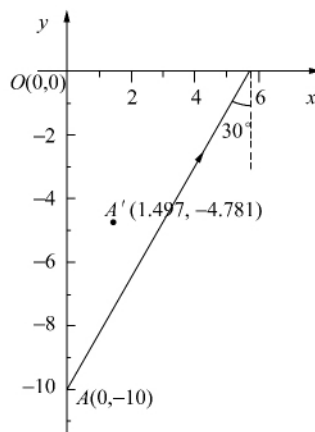


图 11 计算所得像点

作图法: 取 2 束入射光线, 粗略地画出其折射

光线,作反向延长线,得其交点,即为像点,由于折射光线的取法不同,可以得到不同的结果,见图 12 和 13,差别很大. 如要精确,则计算远比公式法复杂.

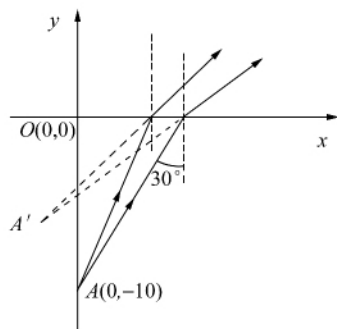


图 12 作图法所得错误像点 1

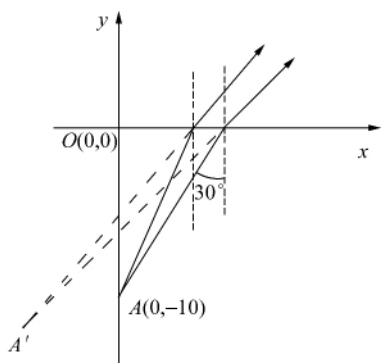


图 13 作图法所得错误像点 2

## 5 结 论

用定量的方法,对物体在光的折射现象中形成的虚像进行讨论后发现,即使最基本的直线所成的图像,都十分的复杂,一般物体在光的折射中所成的虚像就更加复杂,只能由计算机用定量的方法去完成. 对有限物体,从光疏介质中某固定观察点看光密介质中的物体时,应采用文献[2]的画法;从光密介质中某固定观察点看光疏介质中

的物体时,例如图 1,建议修正为图 14.

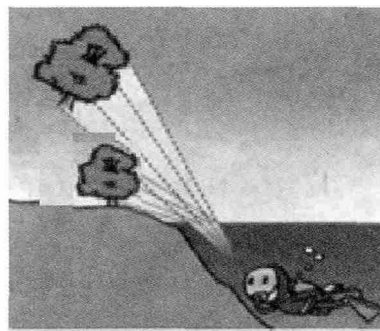


图 14 对图 1 的修正

## 参考文献:

- [1] 苏科版初中物理教材编写组. 义务教育课程标准实验教科书·物理教师教学用书(8 年级上册)[M]. 南京:江苏科学技术出版社,2007:123.
- [2] 闫金铎. 义务教育教科书·物理(8 年级上册)[M]. 2 版. 北京:北京师范大学出版社,2013:113.
- [3] 陈照谋,吴祖仁. 普通高中课程标准实验教科书·物理(选修 3-4)[M]. 北京:教育科学出版社,2006:62.
- [4] 人民教育出版社课程教材研究所. 义务教育教科书·物理(8 年级上册)[M]. 北京:人民教育出版社,2012:82.
- [5] 人民教育出版社课程教材研究所. 普通高中课程标准实验教科书·物理(选修 3-4)[M]. 3 版. 北京:人民教育出版社,2010:50.
- [6] 汪海涛. 水中观像位置的数学推导[J]. 物理通报,2004(4):6-7.
- [7] 王忠云. 光的折射成像位置究竟应该在哪里?[J]. 物理教师,2004,25(8):35,38.
- [8] 周美建. 几何光学中成像性质的确定[J]. 物理通报,2014(3):61-64.
- [9] 杨燕婷,邵温怡,金戈. 自制光的全反射演示仪[J]. 物理实验,2014,34(9):20-21.

(下转第 22 页)

- 济南:山东教育出版社,1999.
- [2] 沈新家. 自制教具在物理教学中的独特地位及作用[J]. 中国现代教育装备,2003(7):45-47.
- [3] 人民教育出版社,课程教材研究所,物理课程教材研究开发中心. 普通高中课程标准实验教科书·物理(选修 3-2)教师教学用书[M]. 北京:人民教育出版社,2013:18.
- [4] 朱向阳,施国富. 磁炮式跳环实验[J]. 教学仪器与实验,2010,26(11):29.
- [5] 刘庆云. “对物体做功,物体内能会增大”演示实验的改进[J]. 物理实验,2000,20(5):34.
- [6] 张维善. 普通高中课程标准实验教科书·物理(必修)[M]. 3 版. 北京:人民教育出版社,2010:89.
- [7] 刘春宇. 物理演示实验在创新教学中的探究[J]. 长春理工大学学报:社会科学版,2007,20(1):96-97.

## Understandings on the improvement of physics demonstration experiments

QI Guo-liang<sup>1</sup>, QU Sheng-yan<sup>2,3</sup>, TAN Xiao-chun<sup>2,3</sup>, ZHU Yun-feng<sup>2,3</sup>

(1. Songyuan Experimental High School, Songyuan 138003, China;

2. TAN Xiao-chun Studio of High School Physics in Jilin Province, Changchun 130117, China;

3. High School Attached Northeast Normal University, Changchun 130117, China)

**Abstract:** Exploratory researches on some experiments without obvious phenomenon and without physics situations in textbook were conducted on different aspects, such as homemaking experimental instrument, improving experimental methods, doing interesting and creative experiments, etc. The principle of demonstration experiments, methods, and operation were also introduced in this paper.

**Key words:** demonstration experiment; vortex; magnetic field; Lenz law; internal energy

[责任编辑:尹冬梅]

(上接第 18 页)

## Quantitative analysis of refractive imaging

MO Bin, ZHANG Jing

(No. 18 High School of Nanjing, Nanjing 210022, China)

**Abstract:** The exact relationship between the positions of object and its refracted image was analyzed quantitatively. The equation of the virtual image, as observed from a stationary location, of a linear object perpendicular to the interface was discussed. It was found that the virtual image was not a straight line but a curved line with extreme points. The results were applied to refractive imaging problems.

**Key words:** refraction; virtual image; quantitative analysis; geometrical optics

[责任编辑:尹冬梅]