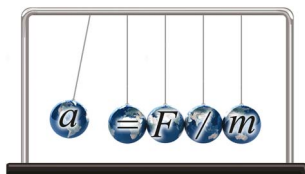


文章编号:1005-4642(2019)06-0023-04



普通物理实验

海市蜃楼形成的理论分析与实验模拟再现

黄思俞,许艳秋,王宗麓,郑冬梅,肖波齐

(三明学院 机电工程学院,福建 三明 365004)

摘 要:分别根据费马原理和光学拉格朗日方程进行了理论推导,得到了自然界里出现的上现蜃景海市蜃楼现象,光线在大气中传输的轨迹方程.两种方法得到的方程所描绘的都是一系列向上凸的曲线,以利用分层折射率的分析方法得到的曲线相似,解释了上现蜃景海市蜃楼的形成原因.利用浓液法对海市蜃楼中的上现蜃景进行了实验模拟再现.实验过程中采用了“纱网框上浮法”注入清水,成功配制了折射率随高度均匀梯度变化的 NaCl 水溶液,穿过浓液的激光光路和理论轨迹方程曲线相似,观察到了实景物清晰稳定的上现蜃景像.

关键词:上现蜃景;费马原理;光学拉格朗日方程

中图分类号:O435.1

文献标识码:A

DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2019.06.004

在平静的海面或沙漠上方,有时会出现城市建筑、亭台楼阁、山水湖泊等自然景观,这是由于光线在密度分布不均匀的大气中传播时,产生折射或全反射形成的上现蜃景或下现蜃景的海市蜃楼.上现蜃景的出现是由于大气的密度随着高度的增加逐渐减小,折射率 n 也形成了随高度的增加逐渐减小的梯度变化^[1-4].例如,夏季在平静的海面或湖面上,由于海水的蒸发,距离海面较近的地方大气湿度大,密度也大,折射率 n 也就大,有可能在海面上出现上现蜃景的海市蜃楼.下现蜃景的海市蜃楼恰好相反,主要出现在干旱的热天,由于地面的温度很高,贴近地面的气体密度更小,气体更稀薄,在距离地面的一定高度内,气体密度随高度的增加逐渐变大,折射率 n 形成了随高度的增加逐渐增大的梯度变化^[5-6].例如,炎热的夏季,在沙漠、戈壁滩等地方出现下现蜃景的海市蜃楼;在平直的高速公路上行车时,也经常看到前方远处贴近柏油路面上出现远方山峰缩小正立像的下现蜃景.

关于海市蜃楼的形成原因,很多文献都利用分层折射率的方法进行分析.光线经过多次折射,入射角不断增大,最后出现全反射改变光路方向^[7-9].为更好地研究和分析海市蜃楼的形成原因,本文将以上海市蜃楼中的上现蜃景为例,分别利

用费马原理和光学拉格朗日方程进行推导,得到大气中光线传播的轨迹方程,对海市蜃楼的形成原因进行分析,并利用浓液法对海市蜃楼中的上现蜃景进行实验模拟再现.

1 海市蜃楼形成的理论分析

1.1 根据费马原理推导大气中光线传播的轨迹方程

当光线从空间某一点 P 经过路径 C 到达 Q 点,所经过空间的折射率分布为 $n(x, y, z)$ 时,在路径中的任一处取一光线轨迹的路程元 ds ,如图 1 所示,光线所经过的光程定义为^[10]

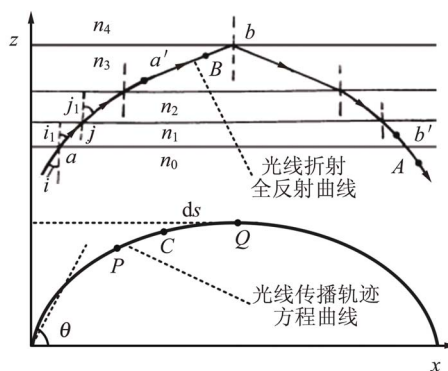


图 1 分层折射率法光线的折射全反射光路曲线和理论推导大气中光线传播的轨迹方程曲线

收稿日期:2018-12-05

基金项目:国家自然科学基金面上项目(No. 51576114);福建省自然科学基金项目(No. 2015J01666)

作者简介:黄思俞(1969—),男,福建建宁人,三明学院机电工程学院教授,从事精密仪器、多铁薄膜的制备与物性研究.



$$\xi = \int_P^Q n(x, y, z) ds.$$

根据费马原理光线将沿着 2 点之间的光程为极值的路线传播, 因而有

$$\delta \xi = \delta \int_P^Q n(x, y, z) ds. \quad (1)$$

由于对称性只需讨论光线在竖直平面 xoz 内的传播, 在光线传播平面中 x 是水平方向, z 是与 x 垂直的竖直方向(高度), 并假设大气的折射率 n 只是高度 z 的函数, 因而式(1)变为

$$\delta \xi = \delta \int_P^Q n(z) ds = 0, \quad (2)$$

$n(z) ds = n(z) \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = n(z) \sqrt{1 + (z')^2} dx$.
由式(2)得

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} n(z) \sqrt{1 + (z')^2} dx = 0,$$

令

$$\psi(z, z') = n(z) \sqrt{1 + (z')^2}, \quad (3)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} z' + \frac{\partial \psi}{\partial z'} z'' = \frac{d}{dx} \left[z' \frac{\partial \psi}{\partial z'} \right].$$

整理得

$$\frac{d}{dx} \left[\psi - z' \frac{\partial \psi}{\partial z'} \right] = 0,$$

因而

$$\psi - z' \frac{\partial \psi}{\partial z'} = K = \text{常数}. \quad (4)$$

将式(3)代入式(4)有

$$\psi - z' \frac{\partial \psi}{\partial z'} = n(z) \sqrt{1 + z'^2} - n(z) \frac{z'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} =$$

$$\frac{n(z)}{\sqrt{1 + z'^2}} = K. \quad (5)$$

整理式(5)得光线在大气中传输的轨迹微分方程^[11]为

$$z' = \frac{1}{K} \sqrt{n^2(z) - K^2}. \quad (6)$$

假设折射率随高度变化规律成指数关系 $n = n_0 e^{-\alpha z}$, 其中 n_0 是底层空气的折射率, α 是正的系数, 由式(6)得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{K} \sqrt{(n_0 e^{-\alpha z})^2 - K^2}.$$

分离变量并积分

$$\int \frac{1}{\sqrt{(n_0 e^{-\alpha z})^2 - K^2}} dz = \frac{1}{K} \int dx, \\ \arcsin \left[\frac{k}{n_0} e^{\alpha z} \right] = \alpha x + c. \quad (7)$$

整理式(7)得光线在大气中传输的轨迹方程

$$z = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{n_0}{k} \sin(\alpha x + c) \right]. \quad (8)$$

式(8)中 α, n_0, k, c 取合适的常量. 根据(8)式得到向上凸的抛物线.

1.2 利用光学拉格朗日方程推导大气中光线传播的轨迹方程

设空气折射率随高度变化为 $n = n_0 e^{-\alpha z}$, 由光学拉格朗日关系得到光线方程为^[12]

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n,$$

在近轴情况下 $ds \approx dx$, 光线方程变为

$$\frac{d}{dx} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dx} \right) = \nabla n.$$

由于对称性, 只需讨论光线在 xoz 平面内的传播, 其中 x 是光线传播平面中与 z 垂直的水平方向, 光线方程变为

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\alpha, \quad (9)$$

解式(9)二次微分方程得

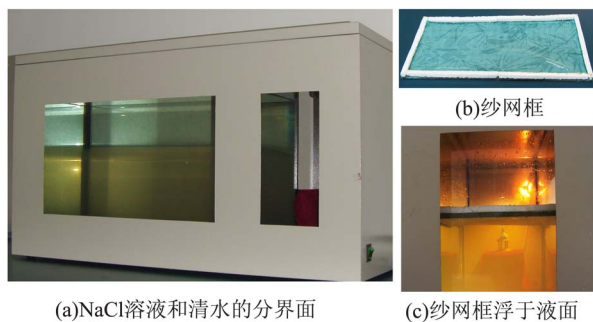
$$z = -\frac{\alpha}{2} x^2 + bx + c. \quad (10)$$

式(10)为一元二次方程, 系数 b 和 c 为待定常量. 由于 α 是正的系数, 所以方程的二次项系数 $-\frac{\alpha}{2} < 0$, 因此光线在大气传输中的轨迹是一系列向上凸的抛物线, 如图 1 所示. 图 1 的上半部分是利用折射率分层法, 根据光线的折射和全反射分析得到的上现蜃景光路图.

2 海市蜃楼的实验模拟再现

2.1 浓液法模拟上现蜃景的实验装置

实验装置主要由透明玻璃水箱、开窗金属箱壳、载物台、实景物、激光笔、射灯等组成, 如图 2 所示. 配置好的 NaCl 水溶液放置在透明玻璃水箱中, 侧面观察窗可以观察 NaCl 质量分数变化



(a) NaCl 溶液和清水的分界面

(c) 纱网框浮于液面

图 2 实验装置

和激光光路,正面通过观察窗可以观察放置在载物台上的实物及上现蜃景.射灯照亮实物有利于上现蜃景的观察.

2.2 配制纯净的 NaCl 水溶液

NaCl 水溶液由食用盐配制而成,由于市面上购买的食盐中含有较多杂质,如果不去除杂质,会导致配制的 NaCl 水溶液变浑浊,不利于实验观察.因此用滤纸对食盐水溶液进行过滤,经过滤的 NaCl 水溶液变的更清澈透明.

2.3 形成平稳 NaCl 水溶液和清水的界面

2.3.1 纱网框的制作

纱网框在折射率梯度变化的 NaCl 水溶液形成中起着重要的作用.在向装了半箱 NaCl 水溶液的透明玻璃箱里注入清水时,纱网可以减少水流对溶液的冲击和扰动,让 NaCl 水溶液和清水层间形成清晰平稳的分界面.纱网框实物如图 2(b)所示,用细木条钉比玻璃箱内壁尺寸略小的方框,框内缝了 3 层纱布.中间一层纱布的纹路倾斜着缝,是为了预防所有的网孔都叠加在一起,形成相同的孔隙,清水直接快速渗漏下去,冲击液面.由于细木条本身要承受 3 层纱网的重力,其浮力不足以支撑整个纱网框的重力,浮在液面上.因此在木条上增加泡沫塑料,增加浮力.

2.3.2 NaCl 水溶液和清水的注入

将质量分数约为 20% 的 NaCl 水溶液过滤后,缓慢倒入装在金属箱壳内的透明玻璃箱中,液面高度约为箱体高度的一半.再将盖上 1 层滤纸的纱网框轻轻放入,纱网框浮在液面上,如图 2(c)所示.在纱网框上铺上 1 层滤纸,能够更好地减少清水注入时对 NaCl 水溶液的冲击和扰动.待 NaCl 水溶液稳定平静后,利用虹吸法缓慢注入清水(用市面上出售的大桶引用水代替),随着清水的注入纱网框也跟着向上浮.当清水加注到 90% 时停止注水,轻轻拿开纱网框,看到 NaCl 水溶液和清水之间形成了清晰的分界面,如图 2(a)所示.与之前文献报道的“保鲜膜法”相比,克服了在抽出保鲜膜时对 NaCl 水溶液和清水界面或多或少的扰动,破坏分界面的稳定,影响 NaCl 水溶液均匀梯度的形成.

2.4 均匀折射率梯度变化的 NaCl 水溶液形成与光路观察

注入完清水后,NaCl 水溶液和清水之间形成了清晰的分界面,随着时间的增加 NaCl 会向清

水层自由扩散.由于在整个实验过程中实验台包括箱体都保持静止,因此自由扩散进行得较缓慢,并且从分界面均匀地向上层的清水扩散.自由扩散进行一定时间后,在竖直方向就会出现 NaCl 溶液质量分数的梯度变化,溶液的折射率也成梯度变化.溶液中质量分数梯度的大小也再随着时间的增加而变化,这种变化过程持续的时间长达十几个小时,直到箱中液体的质量分数处处相同为止.图 3 分别是清水注入后 2 h 和 6 h 激光穿过液体光路发生弯曲的情况,可以看到经过 6 h 自由扩散的溶液对激光光路的弯曲幅度,要比经过 2 h 自由扩散的溶液对激光光路的弯曲幅度更大,说明经过 6 h 自由扩散的溶液质量分数梯度更大,折射率梯度也更大.



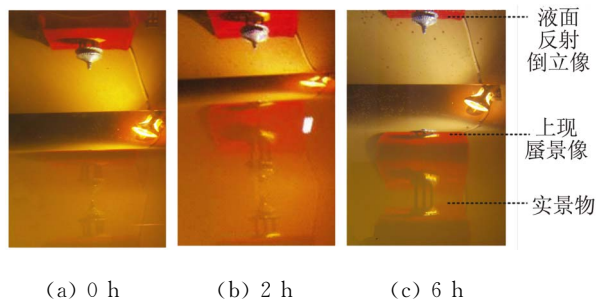
(a)清水注入后 2 h (b)清水注入后 6 h
图 3 清水注入不同时间激光穿过溶液的弯曲情况

图 3 激光穿过溶液的光路和图 1 光线在大气中传播的轨迹方程曲线,它们都是向上凸的抛物线,说明理论推导的轨迹方程与模拟实验相符.

2.5 海市蜃楼的再现与观察

图 4(a)是刚注好清水后从观景窗观察的景象.图中有 3 个像,最上面的倒立像是实物光线在清水液面反射的像,中间的倒立像是实物光线在 NaCl 水溶液和清水之间形成的分界面反射的像,最下面正立的像是实物光线沿水平方向直接透过溶液的像.由于此时并未形成 NaCl 水溶液的质量分数梯度,因此未出现上现蜃景像.图 4(b)是注好清水 2 h 后从观景窗观察的景象.NaCl 水溶液的质量分数梯度逐渐形成,中间比图 4(a)中多了 1 个正立的像(从上往下数第 2 个),即上现蜃景的像,由于 NaCl 扩散层还比较薄所以像较矮较模糊.同时看到中间的倒立像变模糊了,是由于 NaCl 水溶液和清水之间形成的分界面随着自由扩散的进行变得不清晰,导致其反射像变模糊的缘故.图 4(c)是注好清水 6 h 后从观景窗观察的景象.NaCl 水溶液的质量分数梯度完全形成,并且已接近最大值,NaCl 水溶液和清

水之间的分界面完全消失,反射像也消失,正立的上现蜃景像最清晰.画面中又只剩3个像,即最上面的液面反射倒立像、中间的上现蜃景像和最底下实物光线沿水平方向直接透过溶液的像.



(a) 0 h (b) 2 h (c) 6 h
图4 不同时间从观景窗观察上现蜃景海市蜃楼

3 结束语

以上现蜃景为例,分别根据费马原理和利用光学拉格朗日方程进行推导,得到光线在大气中传输的轨迹方程.2个方程虽然形式上不同,但方程描绘的都是一系列向上凸的曲线,分析说明了上现蜃景海市蜃楼的形成原因.最后利用浓液法对海市蜃楼中的上现蜃景进行了实验模拟再现.实验过程中采用纱网框上浮法注入清水,有效地减少了注入清水时对溶液的冲击和扰动,得到了清晰平稳的NaCl水溶液和清水分界面.成功配制了折射率 n 随高度均匀梯度变化的NaCl水溶液,观察到了实物清晰稳定的上现蜃景像,顺利完成了上现蜃景海市蜃楼的实验模拟再现.

Theoretical analysis and experimental reconstruction of the mirage phenomenon

HUANG Si-yu, XU Yan-qiu, WANG Zong-chi, ZHENG Dong-mei, XIAO Bo-qi
(School of Mechanical and Electrical Engineering, Sanming University, Sanming 365004, China)

Abstract: Utilizing the theoretical derivation based on Fermat principle and optical Lagrange equation, the trajectory equation of the light transmitting in atmosphere was obtained, and the natural upper mirage phenomenon was studied. The equations describe a series of convex curves, like the curves obtained by the layered refractive index method. Furthermore, the upper mirage phenomenon was experimentally simulated by using the solution method. By injecting pure water into the solution using a new “floating gauze net” approach, the NaCl solution with uniform vertical refractive index gradient was prepared. In addition, the laser path through the concentrated liquid was similar to the theoretical trajectory equation curve, the stable upper mirage of the object was observed.

Key words: upper mirage; Fermat principle; Lagrange equation

[责任编辑:尹冬梅]

参考文献:

- [1] 陈培杰,欧阳为民. 模拟海市蜃楼实验的配液新方案[J]. 大学物理,2007,26(4):51-53.
- [2] 聂剑军,黄晓标. 海市蜃楼实验研究[J]. 物理教学探究,2013,31(10):8-9.
- [3] 朱建华. 如何在课堂上重现蜃景[J]. 太原大学学报,2011,29(1):98-101.
- [4] Perpina X, Jorda X, Vellvehi M, et al. Study of heat sources interacting in integrated circuits by laser mirage effect [J]. Applied Physics Letters 2014,105:084101.
- [5] 陈晓莉. 海市蜃楼现象成因分析及模拟实验[J]. 教学仪器与实验,2005,21(2):20-21.
- [6] Manning C J, Palmer R A, Chao J L, et al. Charbonnier Photothermal beam deflection using the reverse mirage geometry: Theory and experiment [J]. Journal of Applied Physics, 1992,71:2433.
- [7] 胡安正. 海市蜃楼演示实验装置的创新改造[J]. 实验技术与管理,2007,24(7):61-63.
- [8] 房若宇. 海市蜃楼现象的模拟与研究[J]. 大学物理实验,2016,29(4):46-48.
- [9] 周燕. 海市蜃楼的光学原理[J]. 中学物理教学参考,2014,43(12):44-45.
- [10] 姚启钧. 光学教程[M]. 5版. 北京:高等教育出版社,2014:152-156.
- [11] 刘栓江,韩利亚. 大气中光线轨迹的微分方程[J]. 河南城建高等专科学校学报,2001,10(4):64-65.
- [12] 吕洪君. 海市蜃楼的理论研究[J]. 安徽教育学院学报,1998(1):26-28.