

文章编号:1005-4642(2020)03-0048-03

# 大摆角单摆“周期”变化的解析解及其实验应用

柴聪聪<sup>a</sup>, 凤飞龙<sup>a</sup>, 王公正<sup>a</sup>, 卫芬芬<sup>b</sup>

(陕西师范大学 a. 物理学与信息技术学院, 陕西 西安 710119; b. 基础实验教学中心, 陕西 西安 710062)

**摘要:**大摆角单摆实验由于忽略空气阻尼带来周期测量的系统误差. 基于弱阻尼大摆角单摆的运动方程, 推导了累计“周期”随摆次变化的解析公式, 分析了“周期”随摆次减小的基本规律. 结合实验数据分析, 验证了将其用于大摆角单摆实验进行系统误差修正, 从而通过累计测量减小随机误差的可行性.

**关键词:**弱阻尼; 大摆角; 系统误差; 周期公式

中图分类号: O322

文献标识码: A

DOI: 10.19655/j.cnki.1005-4642.2020.03.010

对于单摆的大摆角非线性振动, 已有许多文献进行了研究, 但是许多模型忽略了空气阻尼的作用, 并不能解释单摆周期测量中摆动“周期”随摆次的变化<sup>[1-3]</sup>; 文献[4-6]研究了空气阻尼作用下的非线性运动方程, 但只考虑了摆角对于准周期的影响, 未对摆动“周期”随摆动次数的变化做进一步的研究; 文献[7]采用实验数据拟合的办法对这种“周期”-摆次关系给出了经验公式, 但只适用于特定摆长. 由于大学物理实验教学中大摆角单摆实验<sup>[8]</sup>摆长不定, 理论上忽略空气阻尼造成实验系统误差, 而测量时采用累计测量求平均周期的方法不仅仅会减小随机误差而且会影响系统误差, 因此有必要对“周期”-摆次关系进行进一步的研究以期改进实验教学.

本文首先在弱阻尼大摆角单摆运动方程的基础上推导累计“周期”随摆动次数变化的关系式, 分析“周期”的变化规律. 然后利用已有实验数据验证公式的准确性以及利用它进行实验系统误差修正的设想.

## 1 弱阻尼大摆角单摆运动方程与“周期”解

对于摆长为  $l$ 、摆角为  $\theta$  的单摆, 在空气阻尼系数为  $c$  的条件下, 根据角动量守恒得

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta + cl^2 \dot{\theta} = 0, \quad (1)$$

令  $\beta = \frac{c}{2m}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , 得

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (2)$$

将  $\sin \theta$  泰勒展开, 忽略高次项, 取

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120}, \quad (3)$$

得

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} \right) = 0. \quad (4)$$

根据文献[5]可得该方程的解为

$$\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos \left[ \omega_1 t + \frac{\omega_1}{\beta \omega_1} \left( \frac{\theta_0^3}{32} - \frac{\theta_0^5}{768} \right) (e^{2\beta t} - 1) + \varphi_0 \right], \quad (5)$$

其中  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ,  $\theta_0$  是最大摆角,  $\varphi_0$  是初始相位. 求解  $\omega_1 T' + \frac{\omega_1}{\beta \omega_1} \left( \frac{\theta_0^3}{32} - \frac{\theta_0^5}{768} \right) (e^{-2\beta T'} - 1) = 2n\pi$ , 可以得到从初始相位为  $\varphi_0$  时开始计起,  $n$  个周期的累计时间  $T'(n)$ .

$$\text{令 } \gamma = \frac{\omega_1}{\omega_0^2} \left( \frac{\theta_0^3}{16} - \frac{\theta_0^5}{384} \right), p = \frac{4n\beta\pi}{\omega_1} + \gamma, \text{ 则有}$$

$$2\beta T'(n) + \gamma e^{-2\beta T'(n)} = p. \quad (6)$$

解之可得

收稿日期: 2019-08-09; 修改日期: 2019-09-27

基金项目: 陕西师范大学校级教学改革综合研究项目 (No. 19JG28, No. 19JG44)

作者简介: 柴聪聪 (1997-), 男, 陕西延安人, 陕西师范大学物理学与信息技术学院 2015 级本科生.

通信作者: 凤飞龙 (1978-), 男, 陕西宝鸡人, 陕西师范大学物理学与信息技术学院副教授, 博士, 研究方向为力学与声学.



$$T'(n) = \frac{p + W(-\gamma e^{-p})}{2\beta} = \frac{2n\pi + \gamma + W(-\gamma e^{-p})}{\omega_1 + 2\beta} \quad (7)$$

式中  $W$  即朗伯  $W$  函数又称为“欧米加函数”或“乘积对数函数”, 在 Matlab 和 Mathematica 软件中均有对应函数可以直接求解。

在通常实验条件下,  $\theta_0 < \pi/3$ , 空气阻尼若取  $\beta = 0.0047$ , 由于  $\omega_1^2/\omega_0^2 \approx 1, \gamma < 0.0654$ ; 又因为  $\gamma, p > 0, W(-\gamma e^{-p}) < 0$ . 根据朗伯  $W$  函数的性质<sup>[9]</sup>, 随着  $n$  增大,  $T'(n)$  逐渐减小;  $n \rightarrow \infty, W(-\gamma e^{-p}) \rightarrow 0$ , 此时,  $T'(n) \rightarrow \frac{2n\pi}{\omega_1} + \frac{\gamma}{2\beta}, T'(n) - T'(n-1) \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_1}$ . 显然随着时间增大, 大摆角阻尼振动“周期”最终演变为小摆角阻尼振动的“准周期” $\frac{2\pi}{\omega_1}$ .

若  $\beta t$  非常小,  $e^{-2\beta t}$  取一阶近似  $e^{-2\beta t} \approx 1 - 2\beta t$ , 则式(5)可以写作  $\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos[(1-\gamma)\omega_1 t + \varphi_0]$ , 由  $(1-\gamma)\omega_1 T_1 = 2\pi$  可得从初始相位为  $\varphi_0$  时开始计起第 1 个周期的时间为  $T_1 = \frac{2\pi}{(1-\gamma)\omega_1}$ . 可见大摆角单摆阻尼振动的“初始周期”即文献[5]中提到的“准周期”。

随着  $\beta t$  增大, 但增大不多时,  $e^{-2\beta t}$  取二阶近似  $e^{-2\beta t} \approx 1 - 2\beta t + 2\beta^2 t^2$ , 沿用以上计算过程可得  $\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos\{[1-\gamma(1-\beta t)]\omega_1 t + \varphi_0\}$ . 解  $[1-\gamma(1-\beta T_2')]\omega_1 T_2' = 2n\pi$  并取正实根可得

$$T_2'(n) = \sqrt{\frac{2n\pi}{(1-\gamma)\omega_1} + \left(\frac{1-\gamma}{2\beta\gamma}\right)^2} - \frac{1-\gamma}{2\beta\gamma} \quad (8)$$

可见, 随着时间增加, 摆动“周期”若以  $T_2'(n)/n$  计算, 则以正比于  $1/\sqrt{n}$  的规律逐渐减小。

因此, 弱阻尼大摆角单摆的“周期”从  $\frac{2\pi}{(1-\gamma)\omega_1}$  开始大致以  $1/\sqrt{n}$  规律减小, 最后无限逼近  $\frac{2\pi}{\omega_1}$ .

## 2 “周期”解的实验验证与应用

基于文献[7]中已知的实验数据, 首先对以上公式进行实验验证. 取摆长  $l = 75 \text{ cm}, g = 9.79407 \text{ m/s}^2, \beta = 0.005^{[5]}$ , 不同摆角下第 1 个周期的实测与理论结果对比如表 1 所示。

表 1 不同初始摆角下单摆第 1 个周期的测量值

$\theta/(\circ)$	T/s			E	
	实测	无阻尼	有阻尼	无阻尼	有阻尼
45	1.805 0	1.808 0	1.805 9	0.166%	0.052%
44	1.803 0	1.804 9	1.803 0	0.105%	0.002%
43	1.799 5	1.801 9	1.800 0	0.133%	0.030%
42	1.797 5	1.799 0	1.797 2	0.083%	0.017%
41	1.795 0	1.796 1	1.794 4	0.061%	0.032%
40	1.792 0	1.793 3	1.791 7	0.072%	0.016%
39	1.788 0	1.790 6	1.789 1	0.145%	0.060%
37	1.783 5	1.785 3	1.784 0	0.101%	0.028%
35	1.779 5	1.780 4	1.779 2	0.051%	0.016%
33	1.774 5	1.775 7	1.774 7	0.068%	0.010%
30	1.768 0	1.769 3	1.768 4	0.074%	0.023%
27	1.762 5	1.763 5	1.762 7	0.057%	0.014%
24	1.758 0	1.758 3	1.757 7	0.017%	0.018%
20	1.752 0	1.752 4	1.751 9	0.023%	0.007%

表 1 中无阻尼振动的周期由

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{4} \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \theta_0 \right] \quad (9)$$

计算. 由表 1 可见, 考虑阻尼由式(7)计算所得结果比无阻尼情况下按式(12)计算所得结果偏差小了将近 1 个数量级(偏差平方和分别为 0.0012%, 0.0001%). 由此一方面可以验证式(8)结果的准确性; 另一方面也说明即使只测量 1 个周期, 大摆角下无阻尼公式也存在较大系统误差。

此外, 根据文献[7], 如果采用累计测量求平均的方法测量周期, 则结果如图 1 所示, 显然随着累计次数增加, 实验系统误差更加明显。

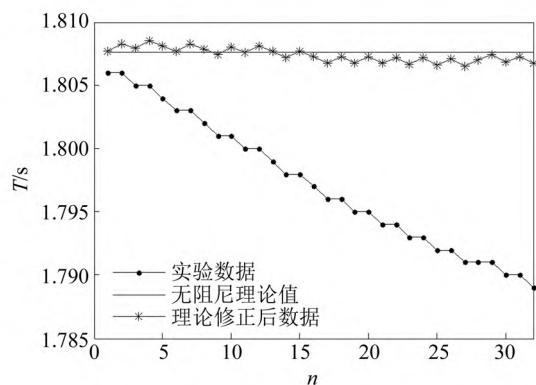


图 1 累计不同摆次时的平均周期

参照式(7)和式(12)引入系统误差计算公式

$$\Delta T = T - T'(n)/n, \quad (10)$$

并利用式(13)对实验结果进行修正,如图1所示,实验结果可以更好地吻合理论设定而基本上不受累计次数的影响.然而,由于文献[7]中“累计”周期实际上是将每个周期测量结果累加后求平均得到的,所以随着累计次数的增加,图1中随机误差并无明显变化,没有体现累计测量提高修正数据精度的作用.但如果实验中直接对多个周期累计计时求平均,则周期测量的随机误差会进一步减小.这种结合系统误差修正和累计周期测量的方法可以减小实验误差,尤其是在用秒表计时,随机测量误差较大的实验中.

### 3 结 论

随着摆次增加,弱阻尼大摆角单摆的“周期”大致从 $\frac{2\pi}{(1-\gamma)\omega_0}$ ,先以 $\frac{T'(n)}{n} \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$ 规律减小,最后无限逼近 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ .利用更准确的计算公式修正大摆角单摆实验结果的系统误差后,可以采用通过累计周期求平均的方法来减小随机误差,提高实验精度.

### 参 考 文 献:

- [1] 李鹏松,孙维鹏,吴柏生.单摆大振幅振动的解析逼近[J].振动与冲击,2008,27(2):72-74.
- [2] 刘正成,李青松,孙迎春.单摆非线性特征的研究[J].物理实验,2018,38(1):56-59.
- [3] 龚善初.利用线化和校正法求非线性单摆运动的周期[J].大学物理,2006,25(2):16-18.
- [4] 肖波齐,兰金标,张伟,等.考虑空气阻力时大角度单摆的周期研究[J].陕西科技大学学报,2011,29(4):105-107.
- [5] 何松林,戴祖诚,黄焱.弱阻尼非线性单摆的周期研究[J].大学物理,2009,28(8):20-22.
- [6] 何松林,黄焱.用改进平均法求解自由衰减振动[J].振动与冲击,2011,30(1):227-229.
- [7] 刘利澜,李德安,周少娜.巧用智能手机拓展单摆实验[J].物理实验,2019,39(5):59-62.
- [8] 秦鸣雷,肖一凡,杨海亮,等.大角度下阻尼对单摆摆动周期的影响[J].物理实验,2012,32(5):42-45.
- [9] 吴俊林.基础物理实验[M].北京:科学出版社,2010:88-94.
- [10] 龙敏,周铁军.Lambert W 函数性质及其应用[J].衡阳师范学院学报,2011,32(6):38-40.

## Analytical solution of the “period” variation of large amplitude simple pendulum and its experimental application

CHAI Cong-cong<sup>a</sup>, FENG Fei-long<sup>a</sup>, WANG Gong-zheng<sup>a</sup>, WEI Fen-fen<sup>b</sup>

(a. School of Physics & Information Technology, Xi'an 710019, China;

b. Basic Experimental Teaching Center, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

**Abstract:** The neglect of air damping made systematic error when measuring the “period” of large amplitude simple pendulum. Based on the solution of simple pendulum with large amplitude and weak damping, the variation of the accumulated “periods” subject to vibration times was formulated. The decreasing feature of the “period” was analyzed. Using experimental datum, the effectiveness of the formula and its feasibility to compensate systematic error were illustrated. Multiple-period averaging could then be used to reduce random error in the experiment.

**Key words:** weak damping; large amplitude; systematic error; period formula

[责任编辑:郭 伟]