

文章编号:1005-4642(2020)03-0043-05

挡光片的宽度和振幅对阻尼振动半衰期测量的影响

任佳琪,李飞祥,彭雪城,黄万霞

(安徽师范大学物理与电子信息学院,安徽 芜湖 241002)

摘 要:在气垫导轨上探究弹簧振子的阻尼振动是普通物理实验中的重要实验,从实验上和理论上探究了挡光片宽度和振幅对半衰期测量的影响. 研究表明实验测得的半衰期随着挡光片宽度的增加而线性增大,随着初始振幅的增大而减小,而且理论和实验符合的很好. 该研究在指导学生正确地选取实验的初始状态,并正确地测量半衰期方面有一定的参考价值.

关键词:阻尼振动;弹簧振子;半衰期;挡光片的宽度;振幅

中图分类号:O321

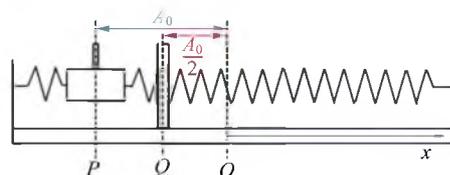
文献标识码:A

DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2020.03.009

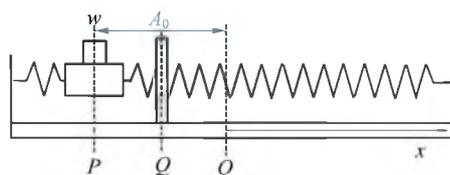
自由振动系统如果在振动过程中不断克服外界阻力做功,消耗能量,则振幅就会逐渐减小,经过一段时间后,振动就会完全停止. 这种振幅越来越小的振动叫做阻尼振动. 描述阻尼振动的模型称为弹簧振子模型,不仅可以描述机械运动,还可以描述 RLC 振荡电路中的电流和电压的变化^[1],近几年来也被推广到微纳光子学中,用来描述微纳光子学中纳米颗粒的谱线^[2],并进一步推广为双谐振子模型来描述模式间的耦合导致的各种现象:Fano 共振、电磁诱导透明以及 Rabi 振荡等. 在光学开关、生物传感、信息储存、增强拉曼等方面有重要的应用. 基于以上的重要应用,弹簧振子运动特点研究成为普通物理实验中重要的实验. 近几年由于计算工具的发展,已有改进方案,例如利用智能手机和软件采集数据可以提高实验的准确性^[3-6]. 但在传统教学中普遍采用光电计时装置,实验中测得的周期都很接近,不随振幅变化,而半衰期却受振幅影响. 利用弹簧振子体系从实验和理论两方面来探究挡光片宽度和振幅对半衰期测量的影响,发现半衰期的测量值与挡光片宽度在小范围内呈线性关系,且随着挡光片宽度的增加,实验测得的半衰期变大;而振幅则相反,随着振幅的增加,测得半衰期变小.

1 弹簧振子体系中推广的半衰期公式

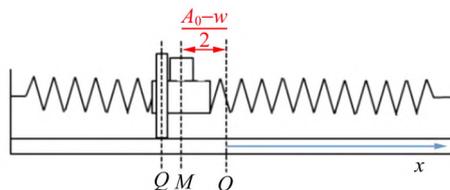
劲度系数均为 k 的 2 根轻质弹簧,质量之和为 m_0 ,与质量为 m' 的滑块,按图 1(a)所示的方式连接,其中 O 点为弹簧振子体系的平衡位置, P



(a)窄挡光片的起始释放状态



(b)宽挡光片时的起始释放状态



(c)宽挡光片的测量结束状态

图 1 气垫导轨简谐振动物体系测量半衰期的原理图

收稿日期:2019-08-02;修改日期:2019-10-08

基金项目:国家自然科学基金(No. 11304002);大学物理教学团队(No. 2016jxtd049);安徽师范大学物理与电子信息学院雏鹰工程项目

作者简介:任佳琪(2000-),女,安徽淮北人,安徽师范大学物理与电子信息学院 2017 级本科生.

通讯作者:黄万霞(1976-),女,安徽安庆人,安徽师范大学物理与电子信息学院副教授,博士,研究方向为微纳光子学.



点为滑块静止释放的位置, Q 为光电门的位置, 且 $OP = A_0$, $OQ = A_0/2$. w 为挡光片的宽度. 为了讨论问题方便, 把弹簧的质量等效加到滑块上, 则弹簧振子体系的总质量为 m . 在弹性恢复力和滑块与导轨之间的粘性阻力的作用下, 弹簧振子的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}, \quad (1)$$

式中 b 为黏性阻尼常量. 若令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\beta = \frac{b}{2m}$, ω_0 为振动系统固有频率, β 为阻尼因数, 则式(1)可写为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2)$$

在弱阻尼情况下, $\beta < \omega_0$, 式(2)的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \alpha), \quad (3)$$

其中 $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. 由式(3)式可知, 阻尼振动的振幅随时间指数衰减, 即

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \quad (4)$$

阻尼振幅减少到初值 A_0 的一半所用的时间是半衰期 T_h , 为了后面讨论问题的方便, 定义 T_h 为半衰期的真实值, 由式(4)可得

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\beta T_h}, \quad (5)$$

由式(5)可解得半衰期为

$$T_h = \frac{\ln 2}{\beta}. \quad (6)$$

式(6)所给出的半衰期的表达式是如图 1(a) 中所示的挡光片极细的理想情况, 即由 A_0 处静止释放, 滑块首次经过光电门时开始计时, 滑块经过多个周期振动后, 运动到的振幅为 $A_0/2$ 时计时结束, 光电门所测量出的总的时间即为半衰期. 即光电门放在 $A_0/2$ 的位置, 滑块由 A_0 处静止释放, 挡光片经过光电门时开始计时, 挡光片不经过光电门时计时结束, 所给出的时间即为半衰期. 如果挡光片比较细, 半衰期的公式就可以近似地由式(6)给出. 如果挡光片比较宽时, 式(6)不适用. 为了研究挡光片宽度对半衰期测量的影响, 做了宽挡光片的半衰期的测试原理图, 如图 1 所示, 图 1(c) 表示结束计时的状态, 它是经过多个振动周期后滑块能经过的且光电门能测到的最小振幅的位置. 从图 1(c) 也可以看出, 与窄挡光片 $A_0/2$ 的位置结束计时相比, 对于宽挡光片还要经

过多个周期振动后, 滑块中心运动到振幅为 $\frac{A_0 - w}{2}$ 时, 计时结束. 即若考虑挡光片宽度 w , 实

际实验中振幅减少到 $\frac{A_0 - w}{2}$ 而不是 $\frac{A_0}{2}$. 为了描述方便, 设宽度为 w 的挡光片测量的半衰期为 T_h' , 根据式(5)有

$$\frac{A_0 - w}{2} = A_0 e^{-\beta T_h'}, \quad (7)$$

从式(7)反解出半衰期的测量值 T_h' 为

$$T_h' = \frac{\ln 2}{\beta} \left[1 + \frac{\ln \frac{A_0}{A_0 - w}}{\ln 2} \right], \quad (8)$$

联立式(6)和式(8)得

$$T_h' = T_h \left[1 - \frac{\ln \left[1 - \frac{w}{A_0} \right]}{\ln 2} \right]. \quad (9)$$

根据式(9), 半衰期的测量值 T_h' 与挡光片宽度和振幅有关. 对于真实的实验过程, 取挡光片宽度 w 为 0.4 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm, 振幅取 20 cm, 30 cm, 40 cm 来测量, 不难发现 w 与 A_0 相差 1 个数量级, 即 $w \ll A_0$, $\frac{w}{A_0}$ 是小量, 通过级数展开, 则式(9)简化为

$$T_h' \approx T_h \left[1 + \frac{w}{A_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{A_0} \right)^2 + \dots \right]. \quad (10)$$

式(10)忽略高阶小量, 只保留一阶小量, 故式(10)进一步简化为

$$T_h' \approx T_h \left[1 + \frac{w}{A_0 \ln 2} \right]. \quad (11)$$

式(11)表明: 在振幅一定的情况下, 半衰期的测量值是挡光片宽度 w 线性函数, 即随着挡光片的宽度的增大而增大, 随着振幅的增大而减小. 基于式(11), 可以得到计算半衰期的相对偏差 η :

$$\eta = \frac{T_h' - T_h}{T_h} = \frac{w}{A_0 \ln 2}. \quad (12)$$

式(12)表明: 相对误差与宽度 w 成正比, 与振幅 A_0 成反比. 因此在实验中, 可以通过减小挡光片的宽度和增大振幅来减小实验误差.

2 实验装置和测量方法

实验所用仪器为气垫导轨、滑块、光电计时装置、挡光片和弹簧. 实验中所用的气垫导轨型号为 QG-5-1.5 m, 用 MUJ-5C 计数器来计算半衰期, 实验配套的挡光片为黑色, 其 $w = 0.4$ cm, 为

了研究挡光片宽度对半衰期的影响,用铝合金自制了棕色的4片挡光片,其宽度分别为0.4 cm, 1.0 cm, 1.5 cm和2.0 cm.

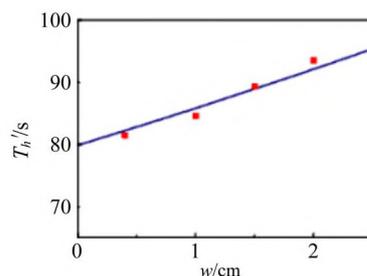
在实验中,首先将气垫导轨调节水平,将宽度为 w 的挡光片固定在滑块上.找到平衡位置O点,将光电门放置在O点左侧 $A_0/2$ 的Q处,将滑块从O点左侧 A_0 处P点无初速度释放,其中 $A_0=20$ cm,30 cm和40 cm.滑块来回经过光电门2次计1个周期,当光电计时装置的周期数不再改变时停止计时,转化得到的时间即为半衰期.

3 挡光片的宽度对半衰期测量的影响

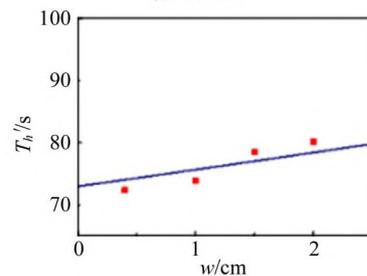
图2分别为不同振幅时实验测量和数值拟合的半衰期随着挡光片宽度的变化曲线.从图2可以看出实验和理论符合得很好. T_b' 与 w 成线性关系,即半衰期的测量值随着挡光片宽度的增加而线性增大.拟合得到的振幅为20 cm,30 cm,40 cm时半衰期的真实值 T_b (即图中的截距)分别为79.912 s,71.907 s,68.505 s.当振幅不同时,拟合所得的半衰期的真实值不同,这表明半衰期与振幅也有关系.由式(6)可知,半衰期与弹簧振子所受到空气阻力有关,阻力与速度有关,根据机械能守恒,振幅越大速度越大,对阻力与速度的线性关系有一定的影响^[9],所以振幅的变化会影响阻尼因数 β ,因此振幅是半衰期的影响因素之一,故振幅不同时拟合所得的 T_b 不同.另外,实验中也制备了宽度小于0.4 cm的挡光片,发现该挡光片无法有效挡光,故光电门的发射光斑直径接近0.4 cm.实验结果表明挡光片的宽度会影响半衰期测量结果,进而产生较大误差,要想尽可能地减小测量误差,理应使用宽度极小的挡光片,但是光电门计时器对挡光片的宽度是有要求的(宽度至少为0.4 cm),所以为了得到较为接近真实值的半衰期而将挡光片的宽度大幅度缩小是不可行的.但我们所探究的实验为尽可能地得到接近真实值提供了一种符合实际方法,就是用不同宽度下的半衰期的测量值进行图像拟合,所得到的纵截距便是更加接近理论值的数值.

根据拟合得到的 T_b ,由式(12)计算相对误差,并绘制振幅分别为20 cm,30 cm,40 cm时相对误差 η 与挡光片宽度 w 的关系图,如图3所示,图3(a)即振幅为20 cm时拟合所得的斜率 $k_1'=0.079 0\pm 0.005 6$,根据式(12)可求得此时

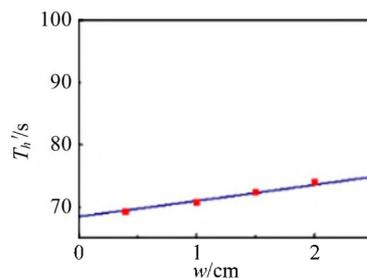
相对误差的理论预测满足 $\eta_1 = k_1 w = \frac{w}{20 \ln 2} \approx 0.072 5 w$.图3(b)即振幅为30 cm时 $k_2'=0.053 8\pm 0.007 1$, $\eta_2 = k_2 w = \frac{w}{30 \ln 2} \approx 0.048 3 w$.图3(c)即振幅为40 cm时 $k_3'=0.038 0\pm 0.001 5$, $\eta_3 = k_3 w = \frac{w}{40 \ln 2} \approx 0.036 2 w$.比较 k_1' 和 k_1 , k_2' 和 k_2 , k_3' 和 k_3 ,可以看出相对误差实验拟合值与式(12)中给出的理论预言非常符合,进一步证明了理论的正确.从图中也可以看出随着



(a) 20 cm

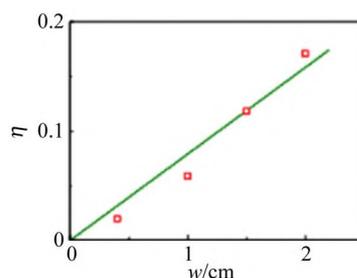


(b) 30 cm

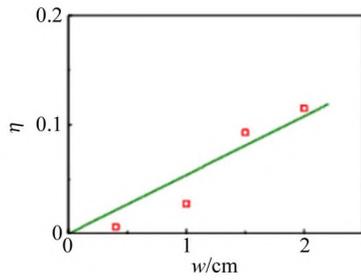


(c) 40 cm

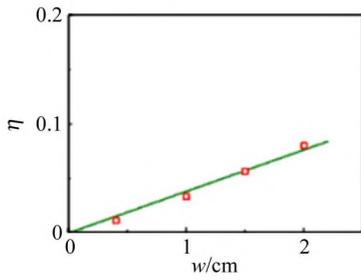
图2 不同振幅时半衰期的测量值随挡光片宽度变化



(a) 20 cm



(b)30 cm



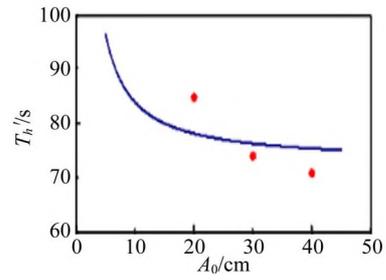
(c)40 cm

图 3 不同振幅时半衰期相对偏差随挡光片宽度变化

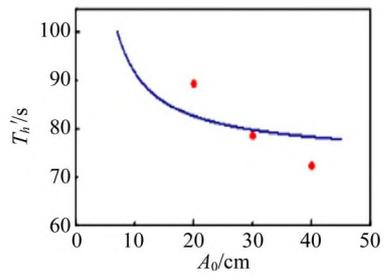
振幅的增大,系统的相对误差减小.所以在实验中选择较大的振幅.然而如果振幅太大,会破坏弹簧的弹性系数,滑块容易飞出导轨,甚至会出现非线性现象,经过多次实验测量,建议最佳的振幅为 40 cm.

4 振幅对半衰期测量的影响

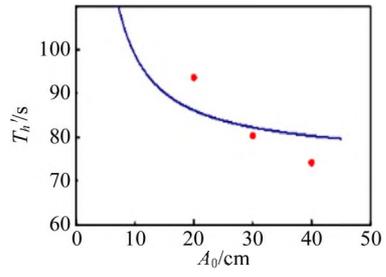
图 4 为挡光片宽度的不同时半衰期的测量随振幅的变化曲线.从图 4 可以看出随着挡光片宽度的增大,半衰期增大;对于固定宽度后半衰期随着振幅的增大而减小.为了研究实验的相对误差,基于式(12)绘出在给定的挡光片的宽度时相对误差随着振幅变化的曲线,如图 5 所示.从图 5 可以看出宽度越大,相对误差越大;对于某一固定宽度,相对误差与振幅成反比关系.实验和模拟符合得较好,其差异主要来源于 2 个方面:不同的



(b)1.0 cm

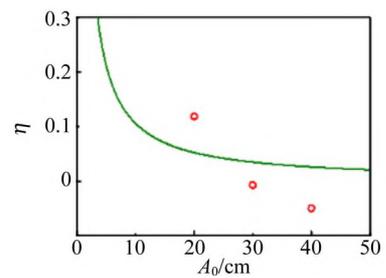


(c)1.5 cm

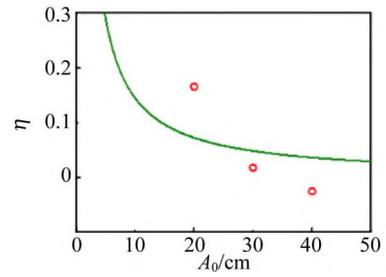


(d)2.0 cm

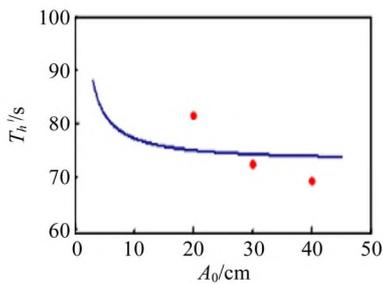
图 4 不同挡光片的半衰期的测量值随振幅变化



(a)0.4 cm



(b)1.0 cm



(a)0.4 cm

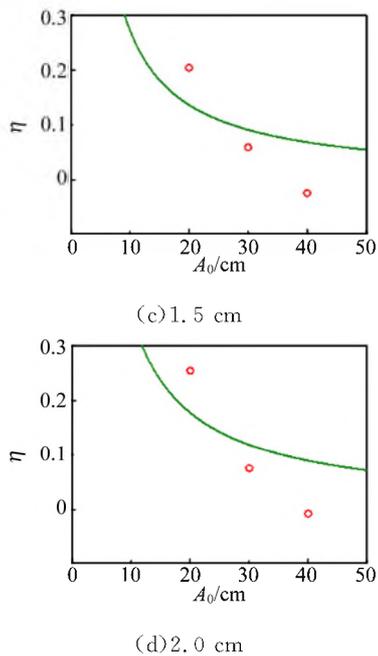


图5 不同挡光片的半衰期的相对误差随振幅变化

振幅对应的半衰期 T_b 是有一定差异,而在拟合中采用的是同一个 T_b 进行拟合的;振幅比较大时,空气阻力不再随速度成线性关系。

5 结论

利用弹簧振子模型研究了挡光片宽度和初始振幅对阻尼振动半衰期测量的影响,给出了宽挡光片的半衰期测量值的理论公式。研究结果表明当体系初始振幅一定时,实验测得的半衰期随着挡光片宽度的增大而线性增大;当挡光片宽度保

持不变时,测得的半衰期随着初始振幅的增大而减小,且相对偏差的绝对值先增大后减小。理论和实验符合得很好。

参考文献:

- [1] Alzar C L G, Martinez M A G, Nussenzevig P. Classical analog of electromagnetically induced transparency [J]. *Am. J. Phys.*, 2002,70(1): 37-41.
- [2] Liu N, Langguth L, Weiss T, et al. Plasmonic analogue of electromagnetically induced transparency at the Drude damping limit [J]. *Nat. Mater.*, 2009,8(9):758-762.
- [3] 胡琦珩,丁益民,李正天,等. 利用智能手机研究气垫导轨上的阻尼振动[J]. *物理通报*,2017(7):70-72.
- [4] 杜江. 用 Tracker 软件分析油浸弹簧振子的阻尼振动[J]. *物理通报*,2016(3):100-102.
- [5] 史振宇,丁益民,张余梦,等. 利用 Tracker 研究气垫导轨上弹簧振子运动[J]. *物理与工程*,2018,28(5):78-81.
- [6] 郭平生,柴志方,崔璐,等. 手机 APP 系统在大学物理实验教学中的应用[J]. *物理实验*,2016,36(11):28-31.
- [7] 张建峰,韩黎源. 用 DIS 验证简谐运动中的机械能守恒定律[J]. *物理实验*,2019,39(4):61-63.
- [8] 陈俊宇,董国波,刘少华,等. 波耳共振仪数据可视化与精确化探究[J]. *物理实验*,2019,39(7):43-47.
- [9] 黄育红,张锁宾,周文飞,等. 利用阻尼振动测量气垫导轨阻尼系数的新思路[J]. *大学物理*,2017(36):28-32.

Influence of light barrier width and amplitude on half-life period measurements of damping vibration

REN Jia-qi, LI Fei-xiang, PENG Xue-cheng, HUANG Wan-xia

(School of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: The damping vibration experiment of spring on air track was one of the most important experiments in college physics. The influence of the light barrier width and amplitude on the half-life period was studied theoretically and experimentally. The results showed that the half-life period increased linearly with the increase of the light barrier width and decreased with the increase of the amplitude. Agreement between theory and experiment was achieved. The research had certain significance in guiding students to choose the initial state of the experiment correctly and measure the half-life period accurately.

Key words: damping vibration; spring oscillator; half-life period; light barrier width; amplitude

[责任编辑:郭伟]