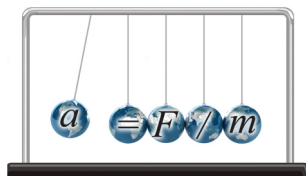


文章编号:1005-4642(2021)01-0027-06



普通物理实验

利用 Mathematica 改进悬丝耦合弯曲 共振法测量弹性模量实验

秦月婷,张贵清,明成国

(天津科技大学 理学院 物理系,天津 300457)

摘要:对悬丝耦合弯曲共振法测量金属材料弹性模量实验原理中的基本概念进行了详细描述;运用 Mathematica 对微分方程进行求解,得出节点位置的数值计算解,拟合出新的固有角频率公式,使实验的理论部分更加完整。提供了可深入理解该实验原理和运用 Mathematica 解决问题的方法和途径。

关键词:弹性模量;悬丝耦合弯曲共振法;节点位置;数值计算;角频率

中图分类号: O343; O4-39

文献标识码: A

DOI: 10.19655/j.cnki.1005-4642.2021.01.005

悬丝耦合弯曲共振法测量弹性模量^[1],因其共振易判别,支撑的影响易排除,实验结果稳定,且有较宽的温度适用范围,而成为世界各国广泛采用的测量方法,也是我国推荐的动态法测量金属材料弹性模量的测定方法^[2],该实验项目在各高校基础物理实验中广泛开设。由于大学物理实验的教学对象是本科低年级的学生,因此在实际教学中,通常有 2 方面的原因使学生无法深刻理解和把握该实验原理而产生困惑,一是不清楚实验中所提及的基本概念;二是在实验理论中涉及梁的横向弯曲振动的动力学方程、微分方程求解及超越方程等复杂的数学计算。为了帮助学生更好地理解基本概念和数学计算,本文对实验中的基本概念进行了详尽阐述,将解析计算和图形演示相结合,并利用 Mathematica 求解微分方程数值解。在教学中降低学生学习的难度,有效地增加对该实验的实验原理的理解,同时提供了可以利用数学软件解决物理问题的直观方法和手段。

1 实验理论中的基本概念

1.1 梁的概念和分类

梁是一种承受垂直于轴线的横向载荷的杆件。将弯曲变形时的梁的轴线,即各截面形心连线取做 x 轴;垂直于梁的方向取做 y 轴。若梁在对称平面内做弯曲振动时,梁的轴线只有横向位

移 $\eta(x, t)$, 这种模型的梁称作欧拉-伯努利梁,也称细梁;如果与梁的长度相比,横截面的尺寸并不很小,则需要考虑转动惯量和剪切形变的影响,这种梁称为铁木辛柯梁,也称粗梁^[3]。本实验中采用的试样为细直圆杆,为细梁。

1.2 梁的横向弯曲振动的动力学方程

对于连续介质的细梁,根据微元的受力分析,利用牛顿第二定律推导梁的横向振动的微分方程。这部分虽有些复杂,但只要清楚细梁横向弯曲时应力和应变发生的位置及其关系,即可明晰其动力学方程的来由。梁的横向弯曲振动的示意图如图 1 所示。图 1 中,虚线部分表示中性层 L ,半径为 ρ ,梁的弯曲横振动时,其线应变 ϵ_x 和正应力 σ_x 均为零,这意味着在中性层上根本不存在拉伸或压缩,而在中性层的两边,形变具有相反的符号;弯曲层 L' ,其半径为 r 。图 2 中 O 点称为形心,即截面图形的几何中心, z 轴为中性轴。由图 1 可知

$$L = \rho\theta, L' = r\theta = (\rho - y)\theta,$$

其弯曲层的形变量 δ 为

$$\delta = L' - L = -y\theta,$$

其纵向线应变 ϵ_x 为

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}. \quad (1)$$

当梁的形变在弹性限度内,根据胡克定律^[4]有

收稿日期:2020-04-26;修改日期:2020-08-02

作者简介:秦月婷(1977-),女,辽宁鞍山人,天津科技大学理学院物理系讲师,硕士,主要从事物理教学与研究工作。E-mail:qinyueting@tust.edu.cn



$$\sigma_x = -E \frac{y}{\rho}, \quad (2)$$

其中 E 为弹性模量, 即待测物理量.

取微元面积 dA , 如图 2 所示, 由于在 x 轴上对所有面元 dA 的合力为零, 可得 $\int y dA = 0$, 这表明: 在弹性限度范围内, 中性轴通过横截面的形心.

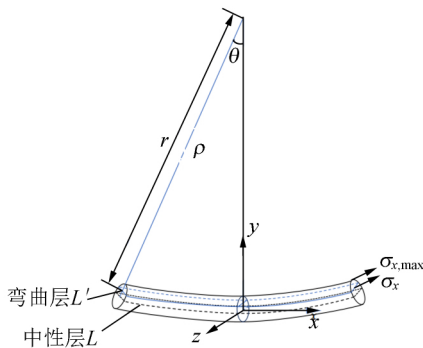


图 1 梁的横向弯曲自由振动示意图

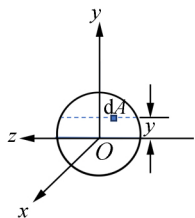


图 2 图 1 的右视图

正应力 σ_x 关于 y 轴对称, 因此, 正应力对 y 轴的力矩为零, 即 $\int z \sigma_x dA = 0$. 而对 z 轴的力矩为

$$\int (-y \sigma_x) dA = M, \quad (3)$$

其中“ $-$ ”表示与 M 正方向相反, M 正方向为 z 轴正方向, M 称为弯矩, 表示作用在梁的给定截面上的内应力之力矩. 将式(2)代入式(3)中, 得

$$\frac{E}{\rho} \int y^2 dA = M,$$

令 $\int y^2 dA = I$, 称为横截面积的惯性矩. 整理得

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}, \quad (4)$$

根据曲率定义 $\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 \eta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$, 其中 η 表示棒

上 x 处截面的 y 方向位移, 且 $\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 \ll 1$, 将 $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 \eta}{dx^2}$ 代入式(4)中得:

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \quad (5)$$

其中 η 称为挠度, 表示中性层上一点的垂直位移 (如图 3 所示). 由式(5)可写出弹性曲线控制微分方程为^[3]

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2}. \quad (6)$$

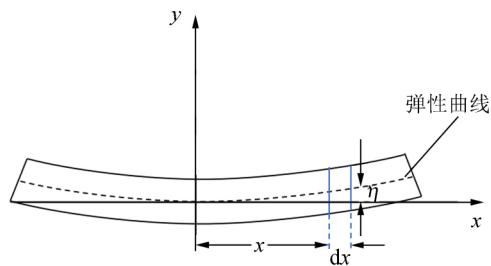


图 3 图 1 正视图

图 4 中 $f(x, t)$ 表示单位长度上微元所受的作用力, V 为微元所受的剪切力, 剪切力的定义如图 5 所示. 因为

$$\sum F_y = m \frac{d^2 \eta}{dt^2}, \quad (7)$$

微元中各力对过 C 点在轴方向上的力矩

$$\sum M_z = 0, \quad (8)$$

根据式(7)列微分方程有

$$V - (V + dV) + f(x, t) dx = \rho A dx \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} - \frac{dV(x, t)}{dx} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2}, \quad (9)$$

其中, ρ 为密度, A 为梁的横截面积. 根据式(8), 得

$$(M + dM) - M + f(x, t) dx \cdot \frac{1}{2} dx - (V + dV) dx = 0, \quad (10)$$

将式(10)展开后, 略去高阶小项, 得:

$$V(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x}, \quad (11)$$

将式(11)和(6)代入式(9)中, 得动力学方程:

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 \eta(x, t)}{\partial x^4} = f(x, t), \quad (12)$$

当梁自由振动时 $f(x, t) = 0$, 动力学方程为

$$\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 \eta(x,t)}{\partial x^4} = 0. \quad (13)$$

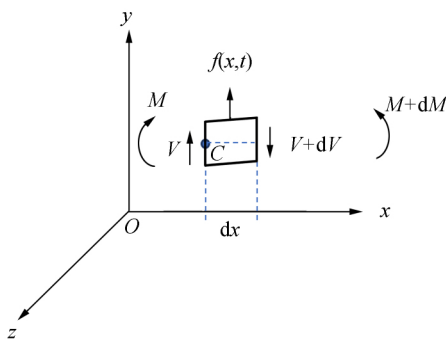


图 4 微元的受力分析图

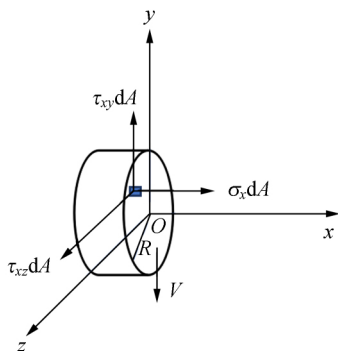


图 5 微元的切应力分析图

说明:梁相对于 xy 平面对称,在 y 方向的剪切力为 $\int \tau_{xy} dA = -V$,在 z 方向的剪切力为 $\int \tau_{xz} dA = 0$, τ_{xy} 和 τ_{xz} 为剪切应力。

1.3 梁的横截面惯性矩的概念

截面所在平面上关于 z 轴的截面惯性矩的积分为

$$I_z = \int y^2 dA,$$

这个概念与转动惯量类似,二者的区别仅在于用面元 dA 代替质量元^[5]。这里计算惯性矩的方法像力学中用到的垂直轴定理,即

$$I_z + I_y = I_x,$$

根据对称性可知, $I_z = I_y$;而 $I_x = \frac{\pi R^4}{2}$ 。若棒的截面直径为 d ,即 $d = 2R$,此时细直圆杆的惯性矩为

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}, \quad (14)$$

坐标轴方向如图 5 所示。

2 运用 Mathematica 求解两端自由的横向弯曲振动梁的动力学方程及相关的数值计算

2.1 运用 Mathematica 求解横向弯曲振动的动力学方程

把计算机辅助手段引入物理学各科教学之中,已成为提升物理教学水平的新增长点。Mathematica 既能进行符号运算,又能进行数值求解,有丰富的矢量运算函数、统计运算函数、表型数据处理函数和作图函数,功能非常强大^[6],因此选用该数学软件进行数值计算。

梁的弯曲振动的动力学方程(13)中,令 $\eta(x,t) = X(x)T(t)$,分离变量^[2,6]得

$$\frac{1}{X} \frac{d^4 X}{dx^4} = -\frac{\rho A}{EI} \frac{d^2 T}{dt^2} = K^4, \quad (15)$$

其中, K 为待定常数。由此得

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - K^4 X = 0, \quad (16)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{K^4 EI}{\rho A} T = 0, \quad (17)$$

式(16)的解为梁弯曲振动的模态方程。根据式(17),得梁的弯曲振动的固有角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{K^4 EI}{\rho A}}, \quad (18)$$

式(18)对处于各种边界条件下的任意形状截面的试样都成立^[7-8]。只要根据特定的边界条件定出常数 K ,代入特定截面的惯性矩 I ,即可得到具体条件下的频率计算公式,其中求解常数 K 是关键,这也是实验教学中学生理解困难的主要方面。

现在利用 Mathematica 软件对(15)式进行微分方程求解和数值计算,进而得出常数 K 。具体计算过程及命令语句如下:

```
In: = ExpToTrig[DSolve[{X''[x]-K^4 X[x]==0},
X[x],x]]/. Rule->Equal
Out: = X[x] == C[1] Cos[Kx] + C[2] Cosh[Kx] + C[4]
Cosh[Kx] + C[3] Sin[Kx] - C[2] Sinh[Kx] + C[4] Sinh
[Kx]
In: = % /. {C[1]->c1,C[2]+C[4]->c2,C[3]->c3,-C
[2]+C[4]->c4}
Out: = X[x] == c1 Cos[Kx] + c2 Cosh[Kx] + c3 Sin[Kx]
+ c4 Sinh[Kx] \quad (19)
```

式(19)为式(16)的通解,也是梁弯曲振动的模态方程。

两端自由的梁悬挂在试样的节点处,则相应的边界条件为:横向作用力 V 为零,弯矩 M 为零,即

$$\left. \frac{d^3 X}{dx^3} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{d^3 X}{dx^3} \right|_{x=l} = 0,$$

$$\left. \frac{d^2 X}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{d^2 X}{dx^2} \right|_{x=l} = 0,$$

输入边界条件:

```
In:=MatrixForm[Flatten[{{Solve[∂(x,2)%==0]/.x→0},
{Solve[∂(x,2)%==0]/.x→1},
{Solve[∂(x,3)%==0]/.x→0},
{Solve[∂(x,3)%==0]/.x→1}}]]]
```

```
In:=Simplify[Det[
{
{-1, 1, 0, 0},
{-Cos[Kl], Cosh[Kl], -Sin[Kl], Sinh[Kl]},
{0, 0, -1, 1},
{Sin[Kl], Sinh[Kl], -Cos[Kl], Cosh[Kl]}
}]]]=0]
```

```
Out:=Cos[Kl]Cosh[Kl]-1=0,
```

$$\cos(Kl)\cosh(Kl)-1=0, \quad (20)$$

此式即为通解式(19)加入边界条件后的特解,也称为两端自由梁的频率方程.

2.2 运用 Mathematica 对动力学方程特解求根

利用 Mathematica 寻找满足式(20)的 Kl 值的方法. 首先,利用图像法判断根的范围.

```
In:=Show[Plot[Cos[Kl]*Cosh[Kl]-1,{Kl,0,10}]]
```

```
Out:=
```

由图 6 可知,第 1 个根和第 2 个根分别在 4.7 和 7.8 附近. 依此方式,寻找到一系列满足方程(20)的根.

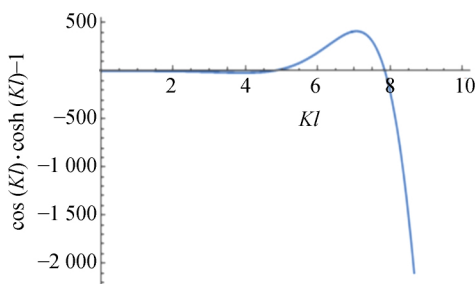


图 6 $\cos(Kl) \cdot \cosh(Kl) - 1$ 随 Kl 的变化曲线

```
In:=FindRoot[-1+Cos[Kl]*Cosh[Kl]==0,
{x,{4.7,7.8,11.0,14.1,17.3,20.4,23.5,26.7,29.8,
33.0,36.2,39.2,42.4,45.5,48.7,51.8,54.97,58.1,61.
2,64.4,67.5,70.5,73.8,77.2,80.0,83.2,86.4,89.2,
92.6,95.5,99.2,102.0,105.5,108.4,111.7,114.7}}],
WorkingPrecision->7]
```

```
Out:=Kl->{4.730041, 7.853205, 10.99561,
14.13717, 17.27876, 20.42035, 23.56194, 6.70354,
```

29.84513, 32.98672, 36.12832, 39.26991, 42.41150, 45.55309, 48.69469, 51.83628, 54.97787, 58.11946, 61.26106, 64.40265, 67.54424, 70.68583, 73.82743, 76.96902, 80.11061, 83.25221, 86.39380, 89.53539, 92.67698, 95.81858, 98.96017, 102.1018, 105.2434, 108.3849, 111.5265, 114.6681}}

然后进行拟合 Kl 与正整数 n 的函数关系,并绘图(见图 7).

```
In:=FindFit[{4.730041, 7.853205, ..., 114.6681},
a+bn,{a,b},n]
```

```
Out:=Kl=1.572678+3.141516n
```

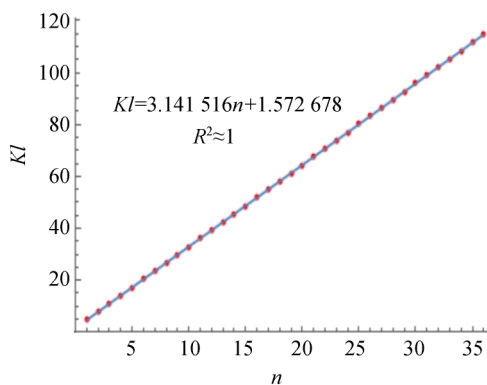


图 7 Kl 值的散点图及其与正整数 n 的线性拟合曲线图

Kl 值与正整数 n 之间关系的拟合方程为 $Kl = 3.141516n + 1.572678$, 拟合方程近似为

$$K_n l = (2n+1) \frac{\pi}{2}, n=1, 2, 3 \dots \quad (21)$$

这一结论与文献[9]一致. 表 1 给出 $K_n l$ 的数值解和拟合解的数值及相对偏差.

表 1 $K_n l$ 数值解和拟合解的数值对比表

n	$K_n l$		E_r
	数值解	拟合解	
1	4.730041	4.712389	0.37%
2	7.853205	7.853982	0.01%
3	10.99561	10.995574	0
...	0

注:当 $n=3, 4, \dots, 36$, 其相对偏差均近似为 0.

2.3 两端自由梁的弯曲振动的角频率公式及模态函数

根据(20)式可知,两端自由的梁的弯曲振动的各阶固有角频率公式可写为

$$\omega_n = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right]^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, n=1,2,3\cdots \quad (22)$$

代入(14)式,得出细直圆杆的弹性模量公式为

$$E = \frac{2^{10}}{(2n+1)^4 \pi^5} \frac{l^3 m}{d^4} \omega_n^2 = \frac{2^{12}}{(2n+1)^4 \pi^3} \frac{l^3 m}{d^4} f_n^2, \quad n=1,2,3\cdots \quad (23)$$

其中 f 为固有频率. 表 2 列出当 $n=1,2,3$ 时 $K_n l$ 在数值解和拟合解下的 $\frac{2^8 \pi}{(K_n l)^4}$ 值.

表 2 数值解和拟合解下的 $\frac{2^8 \pi}{(K_n l)^4}$ 值对比

n	$K_n l$		$\frac{2^8 \pi}{(K_n l)^4}$	
	数值解	拟合解	数值解	拟合解
1	4.730 041	4.712 389	1.606 683	1.630 892
2	7.853 205	7.853 982	0.211 447	0.211 364
3	10.995 61	10.995 574	0.055 019	0.055 020

将式(19)中代入 $c_1 = c_2, c_3 = c_4, c_2 = -\frac{c_4 [\sin(Kl) - \sinh(Kl)]}{\cos(Kl) - \cosh(Kl)}$, 可得各阶模态函数 $X(x) = -\frac{c_4 [\cos(K_n x) + \cosh(K_n x)] [\sin(K_n l) - \sinh(K_n l)]}{\cos(K_n l) - \cosh(K_n l)} + c_4 [\sin(K_n x) + \sinh(K_n x)], n=1,2,3\cdots$

2.4 两端自由梁在基频振动时的节点位置计算和振形图

两端自由梁在基频振动 $K_1 l = 4.730 041$ 时, 节点处 $X(x) = 0$, 得

$$-\frac{[\cos(K_1 x) + \cosh(K_1 x)] [\sin(K_1 l) - \sinh(K_1 l)]}{\cos(K_1 l) - \cosh(K_1 l)} + [\sin(K_1 x) + \sinh(K_1 x)] = 0, \quad (24)$$

令 $y = \frac{x}{l}$,

```
In: = Plot[-1.0178094106701914(Cos[4.730041y] + Cosh[4.730041y]) + Sin[4.730041y] + Sinh[4.730041y], {y, 0, 1}, Epilog -> {PointSize[Medium], Point[{0.224, 0}, {0.7758, 0}]}]
Out: =
```

由图 8 可知, y 值在 0.2 和 0.8 附近, 因此利用数值计算寻找满足式(24)的数值解为

```
In: = FindRoot[-1.0178094106701914(Cos[4.730041y] + Cosh[4.730041y]) + Sin[4.730041y] + Sinh[4.730041y] = 0, {y, {0.2, 0.7}}, WorkingPrecision -> 7]
Out: = {y -> {0.2241575, 0.7758425}}
```

求出 y 值的数值解.

当 $K_1 l = 4.730 041/l$ 时, 节点位置为 $x = 0.224 137 5l$ 和 $0.775 842 5l$. 依此方式, 可计算出一系列 Kl 值相对应的节点位置 x/l 及其振形图, 如图 9 所示.

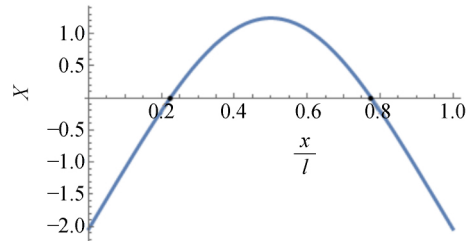
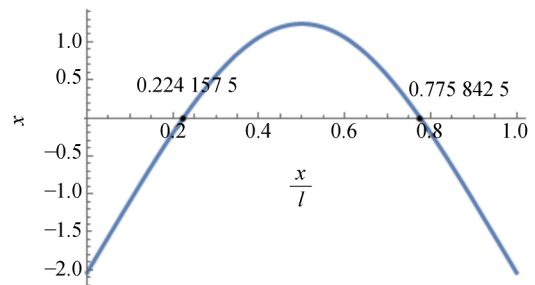
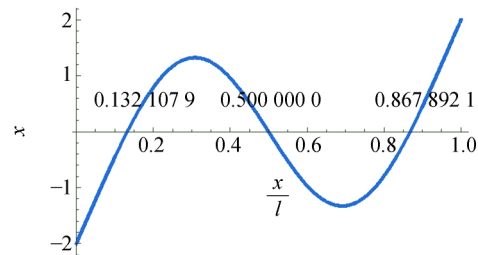


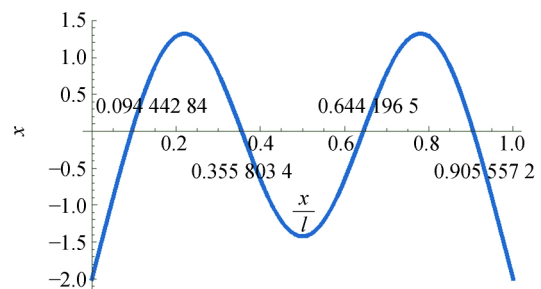
图 8 当 $K_1 l = 4.730 04$ 时试样弯曲基频振动的振形图



(a) $K_n l = 4.730 041$



(b) $K_n l = 7.853 205$



(c) $K_n l = 10.995 61$

图 9 两端自由梁弯曲共振时前三阶振形图及对应的节点位置

3 结束语

综上,对悬丝耦合弯曲共振测量弹性模量的实验原理,从基本理论出发详细地推导出梁的横向弯曲振动的动力学方程.利用 Mathematica 对微分方程求解两端自由梁的横向弯曲振动动力学方程中频率方程的根和相应的节点位置,并拟合了节点位置及其变化规律,得出新的固有圆频率公式和模态函数;详细地给出弯曲振动的基振形求解过程及二阶、三阶振形图.为更好地理解本实验,这部分理论内容可以在实验内容中给以补充和丰富.

在大学物理实验的教学中,面对一些较复杂的数学计算的时候,引导学生借助计算机软件化解知识难点,可使物理实验原理的阐述更加明晰,物理概念得到深化,同时拓宽了物理实验课程的内容,也促使物理实验课程的进一步改进和拓展.对于学生而言,学懂弄通是提高学生学习兴趣的关键,引入计算恰恰是使学生对实验原理理解更加透彻的一种有效途径,且培养了学生利用现代化手段解决问题的能力.因此,这种教学模式的改进在进一步提升物理实验课程的学术水平和教

学水平,提升学生学习的兴趣方面,起到了极大地促进作用.

参考文献:

- [1] 潘人培,赵平华.悬丝耦合弯曲共振法测定金属材料杨氏模量[J].物理实验,2000,20(9):5-7.
- [2] GB/T22315-2008.金属材料弹性模量和泊松比试验方法[S].
- [3] 辛格雷苏·S拉奥.机械振动[M].5版.李欣业,杨理城,译.北京:清华大学出版社,2016.
- [4] 费迪南德·P比尔,E罗素·约翰斯顿 Jr,约翰·T德沃尔夫,等.材料力学[M].6版.陶秋帆,范钦珊,译.北京:机械工业出版社,2015.
- [5] 朗道 Л Д,栗弗席兹 Е М.弹性理论[M].5版.武际可,刘寄星,译.北京:高等教育出版社,2011.
- [6] 董健.引入计算手段,提升大学物理的教学水平[J].大学物理,2018,37(2):47-52.
- [7] 朱献松.大学物理实验[M].天津:天津大学出版社,2007.
- [8] 徐嘉彬,袁海甘,吴鸿斌,等.弯曲共振法测量材料的杨氏模量实验改进[J].物理实验,2011,31(11):43-46.
- [9] 刘延柱,陈立群,陈文良.振动力学[M].3版.北京:高等教育出版社,2019.

Improving elasticity modulus of metal materials by suspension wire coupled bending resonance using Mathematica

QIN Yue-ting, ZHANG Gui-qing, MING Cheng-guo

(Department of Physics, College of Sciences, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300457, China)

Abstract: The basic concept of the experimental principle for measuring elasticity modulus of metal materials by the suspension wire coupled bending resonance method was described in detail. Mathematica software was used to solve the differential equation. The numerical solution of node position was obtained, and a new angular frequency formula was fitted, which made the theoretical part of the experiment more complete. At the same time, it provided a method to deeply understand the experimental principle and apply Mathematica to solve the problem.

Key words: elasticity modulus; wire coupled bending resonance method; node location; numerical calculation; angular frequency

[责任编辑:郭伟]