

文章编号:1005-4642(2021)02-0037-06

专  
题



## 撒克逊碗下沉时间的研究

钟书河山<sup>a</sup>, 易荣彬<sup>a</sup>, 李金蚊<sup>a</sup>, 樊代和<sup>a,b</sup>,  
刘其军<sup>a,b</sup>, 贾欣燕<sup>a,b</sup>, 魏 云<sup>a,b</sup>

(西南交通大学 a. 物理科学与技术学院, 四川 成都 610031;

b. 物理国家级实验教学示范中心(西南交通大学), 四川 成都 611756)

**摘 要:**研究了撒克逊碗在液体中的下沉时间. 通过建立物理模型, 结合流体力学过程, 分析了碗的质量、液体密度、缺口面积对撒克逊碗在液体中的下沉时间的影响. 理论分析结果表明:碗质量或者碗缺口面积的增大, 都会导致撒克逊碗下沉时间缩短, 而液体密度对下沉时间的影响较小. 分别制作了 2 种类型的撒克逊碗, 对理论分析结果进行了验证, 实验结果与理论分析基本一致.

**关键词:**撒克逊碗; 下沉时间; 缺口面积; 液体密度; IYPT

**中图分类号:** O351.1

**文献标识码:** A

**DOI:** 10.19655/j.cnki.1005-4642.2021.02.007

撒克逊人通常是指公元五世纪起到诺曼征服时止移居并统治英格兰的日耳曼民族<sup>[1]</sup>. 在那个时代, 计时工具是比较匮乏的, 撒克逊人发明了计时装置——撒克逊碗. 他们在碗底打开孔洞, 将碗放在水中自然下沉, 通过观察碗在水中的下沉现象来计时. 事实上, 在古代, 也有很多种方法能够实现“计时”的功能. 例如, 我国古代藏族人发明了“圭表”及“刻漏”测时装置<sup>[2]</sup>. 李强等研究了“马上刻漏”这种古代计时工具的特点<sup>[3]</sup>, 陈宁心等研究了古代的另一钟计时器“水钟”<sup>[4]</sup>. 在西方, “沙漏”也是计时装置, 最早于三世纪由亚历山大发明<sup>[5]</sup>.

由于撒克逊碗计时器具有制作方便、计时较为准确等特点, 研究撒克逊碗下沉过程中的相关物理问题成为 2020 年国际青年物理学家锦标赛(IYPT)的竞赛题目之一<sup>[6]</sup>. 本文分别从理论和实验分析撒克逊碗计时装置的下沉时间. 从理论上, 建立了物理模型, 得出了撒克逊碗下沉时间与相关物理参量的关系. 实验上, 制作了 2 种类型的撒克逊碗, 并对相关物理参量进行了研究. 实

验结果与理论分析基本一致.

### 1 理论分析

假设将一质量为  $m_0$ 、厚度为  $d_0$ 、高度为  $h_0$ 、底部具有横截面积为  $S$  孔洞的碗, 放入宽度无限大、密度为  $\rho$  的液体中. 碗在液体中的下沉过程如图 1 所示.

1) 在  $t=0$  时刻, 碗底与液面相接触[图 1(a)]. 此时, 由于受到重力的作用, 碗在液体中开始下沉.

2) 在下沉过程的任一时刻  $t$ [图 1(b)], 碗的一部分沉入液体中. 此时, 碗内外液面有一定的高度差.

3) 当  $t=t_{\max}$  时刻[图 1(c)], 碗口与外液面齐平. 此时, 碗处于临界状态. 即当  $t>t_{\max}$  后, 碗外液体将从碗口进入碗内(而非从碗底孔洞进入), 然后碗将按照常规的物理规律迅速沉入液体中.

本文将详细分析撒克逊碗在  $0 \leq t \leq t_{\max}$  时间段内下沉的物理过程.

如图 1(b)所示, 以碗中心轴和碗底与液面的

**收稿日期:** 2020-09-29; **修改日期:** 2021-02-01

**基金项目:** 教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会 2020 年高等学校教学研究项目(No. DJZW202036xn); 中央高校基本科研业务费专项资金资助(No. 202010613058); 2020 年西南交通大学大学生物理学术竞赛类教育教学改革研究项目(No. SWPTJG2002)

**作者简介:** 钟书河山(1998-), 男, 广东深圳人, 西南交通大学物理科学与技术学院 2017 级本科生.

**通信作者:** 樊代和(1981-), 男, 山西河曲人, 西南交通大学物理科学与技术学院副教授, 博士, 研究方向为量子光学及大学物理实验教学. E-mail: dhfan@swjtu.edu.cn



交点作为坐标原点, 平行于液体平面方向作为  $x$  轴, 建立直角坐标系.

分局部放大如图 3 所示, 其中  $r_{in}$  为内半径,  $r_{out}$  为外半径,  $d_0$  为碗壁厚度, 碗底厚度近似为 0.

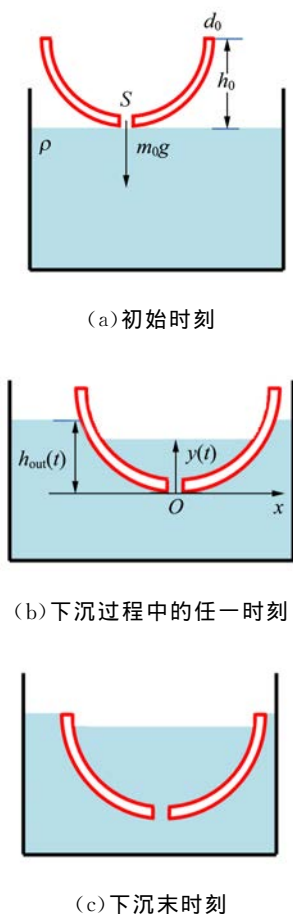


图 1 撒克逊碗在液体中下沉过程示意图

在撒克逊碗下沉过程的任一时刻  $t$  [图 2 (a)], 假设碗内液面高度为  $y(t)$ , 碗内液体体积为  $V_{in}(y)$ , 碗内液面处的横截面积为  $S_{in}(y)$ . 碗外液面高度为  $h_{out}(y)$ , 碗外排开液体的体积为  $V_{out}(h_{out})$ , 碗外液面处的横截面积为  $S_{out}(h_{out})$ . 在随后很短的时间  $dt$  内, 有  $dy$  高度的液体从碗底进入碗内[图 2(b)]. 此时, 碗外液面距离碗底的高度增加  $dh_{out}$ .

从图 2(b)可以计算得出, 在  $dt$  时间内, 碗内液体增加的体积为

$$dV_{in}(y) = S_{in}(y) dy, \quad (1)$$

相应地, 碗外增加的排开液体的体积为

$$dV_{out}(h_{out}) = S_{out}(h_{out}) dh_{out}(y). \quad (2)$$

事实上, 碗内增加的液体, 都是由碗底的小孔流入. 因此, 可以以碗底小孔作为研究对象, 对该过程做进一步分析. 将图 1 或图 2 中碗底开口部

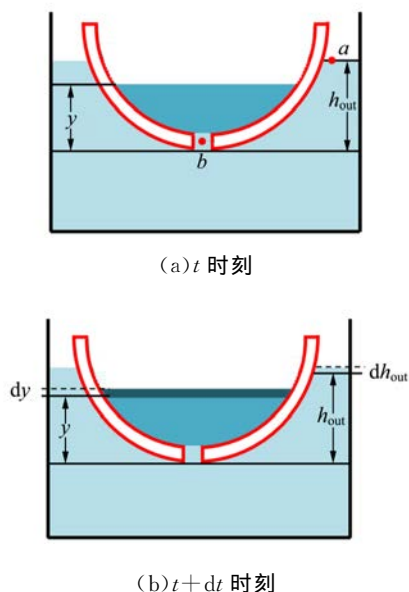


图 2 撒克逊碗在液体中下沉过程某一时刻的示意图

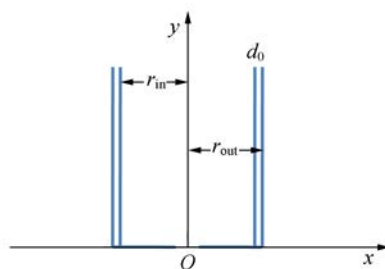


图 3 圆柱形撒克逊碗示意图

如图 2 所示, 在  $dt$  时间内, 从碗外经孔洞流入碗内的液体体积为

$$dV_{in} = KSv_b(t) dt, \quad (3)$$

其中,  $v_b(t)$  表示  $t$  时刻液体流入小孔的流速.  $K$  为无量纲物理常量<sup>[7]</sup>, 与孔洞的形状以及液体黏度有关, 可由具体实验测得.

结合(1)式和(3)式可以得出:

$$dt = \frac{S_{in}(y)}{KSv_b(t)} dy. \quad (4)$$

通常, 研究撒克逊碗下沉时间实验, 使用的液体为水, 其黏度很小, 因此将该过程中的液体近似当做理想流体来处理. 考虑  $a, b$  两点之间部分的液体为一“流管”[图 2(a)], 则流管内的液体应满足伯努利方程<sup>[7-8]</sup>, 即

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 + \rho g h_a = p_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho g h_b, \quad (5)$$

其中,  $v_a$  和  $v_b$  分别表示  $a$  和  $b$  两点液体的流速,  $h_a$  和  $h_b$  分别表示  $a$  和  $b$  两点的高度,  $p_a$  和  $p_b$  分别表示流管外  $a$  点和  $b$  点的压强。

通常情况下,撒克逊碗的厚度比较小,因此,可以近似认为  $d_0 \approx 0$  (即  $h_a = h_{out}, h_b = 0$ )。同时,由于碗放在无限大的液体中,因此可近似认为在撒克逊碗的下沉过程中,  $v_a \approx 0$ 。此时,  $a$  点处流体的压强可近似用静流体的压强来描述 (即  $p_a = p_0$ ),  $b$  点处的压强可近似写为  $p_b = p_0 + \rho g y$ 。在上述条件下,可将(5)式进一步化简为

$$v_b(t) = \sqrt{2g[h_{out}(t) - y(t)]} \equiv \sqrt{2gh_d}, \quad (6)$$

其中,定义  $h_d \equiv h_{out} - y$ , 表示  $t$  时刻碗内外液面高度差。

事实上,撒克逊碗在液体中缓慢下沉,因此可以将下沉过程当成准静态过程处理。即在很短的时间内,碗受到的重力和浮力相等:

$$m_0 g = [V_{out}(h_{out}) - V_{in}(y)] \rho g. \quad (7)$$

化简(7)式,可以得到:

$$V_{out}(h_{out}) = \frac{m_0}{\rho} + V_{in}(y), \quad (8)$$

其中  $V_{out}$  和  $V_{in}$  与碗的形状有关。一旦碗的质量、形状及液体的密度确定,则(8)式中仅有  $h_{out}$  和  $y$  变量。这里,不妨假设  $h_{out}$  与  $y$  的变化关系为

$$h_{out} = f(y), \quad (9)$$

此时,变化关系  $f$  由  $V_{out}, V_{in}, m_0$  和  $\rho$  唯一确定。将(9)式代入  $h_d$  的定义式,即可得到:

$$h_d \equiv h_{out} - y = f(y) - y. \quad (10)$$

从(10)式可以看出,撒克逊碗在液体中的下沉过程,碗内外液面高度差将仅与碗内液面的高度值有关。

将(6)式代入(4)式,得到:

$$dt = \frac{S_{in}(y)}{KS \sqrt{2gh_d}} dy. \quad (11)$$

对(11)式两侧求积分,得到当撒克逊碗内液面高度为常数  $y_0$  时,所用的时间为

$$t = \frac{1}{KS \sqrt{2g}} \int_0^{y_0} \frac{S_{in}(y)}{\sqrt{h_d}} dy \quad (0 \leq y_0 \leq y_{max}), \quad (12)$$

其中,  $y_{max}$  为碗口与外液面齐平时 (即  $h_{out} = h_0$ ) 碗内液面的高度。

为了能够定量分析(12)式的理论结果,以图3所示的圆柱形撒克逊碗 (即碗的形状参量可写出解析表达式) 为例做进一步分析。在这种情况下,

碗内液面处的横截面积  $S_{in}(y)$ 、碗外液面处的横截面积  $S_{out}(h_{out})$  均与时间  $t$  无关,分别为

$$S_{in}(y) = \pi r_{in}^2, \quad (13)$$

$$S_{out}(h_{out}) = \pi r_{out}^2. \quad (14)$$

$t$  时刻碗内液体体积和碗外排开液体的体积为

$$V_{in}(y) = \pi r_{in}^2 y. \quad (15)$$

$$V_{out}(h_{out}) = \pi r_{out}^2 h_{out}, \quad (16)$$

分别将(15)和(16)式代入(8)式,可以得到:

$$h_{out} = \frac{m_0}{\pi \rho r_{out}^2} + \frac{r_{in}^2}{r_{out}^2} y, \quad (17)$$

结合  $h_d$  的定义式,可以得到:

$$h_d = \frac{m_0}{\pi \rho r_{out}^2} - \frac{r_{out}^2 - r_{in}^2}{r_{out}^2} y. \quad (18)$$

最终,将(13)和(18)式代入(12)式中,即可得到撒克逊碗在液体中的下沉时间为

$$t = \frac{1}{KS \sqrt{2g}} \int_0^{y_0} \frac{\pi r_{in}^2}{\sqrt{\frac{m_0}{\pi \rho r_{out}^2} - \frac{r_{out}^2 - r_{in}^2}{r_{out}^2} y}} dy \quad (0 \leq y_0 \leq y_{max}). \quad (19)$$

积分后可得:

$$t = \frac{2\pi r_{in}^2 r_{out} \sqrt{(r_{in}^2 - r_{out}^2) y_0 + \frac{m_0}{\pi \rho}}}{KS (r_{in}^2 - r_{out}^2) \sqrt{2g}} - \frac{2\pi r_{in}^2 r_{out} \sqrt{\frac{m_0}{\pi \rho}}}{KS (r_{in}^2 - r_{out}^2) \sqrt{2g}} \quad (0 \leq y_0 \leq y_{max}). \quad (20)$$

从(20)式可以看出,撒克逊碗在液体中的下沉时间  $t$  与碗的质量  $m_0$ 、碗的内外半径  $r_{in}$  和  $r_{out}$ 、液体密度  $\rho$ 、缺口面积  $S$  以及常量  $K$  有关。

## 2 实验研究

如图4所示,将圆柱形的塑料碗(用游标卡尺测量出碗的外半径  $r_{out} = 3.350$  cm,碗的内半径  $r_{in} = 3.258$  cm,碗的高度  $h_0 = 7.300$  cm),底部钻出2个直径约0.40 cm的圆形孔洞(即每个孔洞



图4 圆柱形碗实物图

的面积为  $0.04\pi \text{ cm}^2$ ), 即制成简易的撒克逊碗. 碗的质量可以将配重球形钢珠粘贴在碗外底部进行改变. 选用单个钢珠的质量为  $m_s = 4.15 \text{ g}$ , 直径为  $D_s = 1.000 \text{ cm}$  (即每个钢珠的体积为  $V_s = \frac{\pi}{6} \text{ cm}^3$ ). 为了能够定量研究液体在碗内的高度, 使用油性笔在碗的外表面标定了刻度.

首先, 以自来水 (使用密度计测量其密度为  $\rho = 1.01 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ) 作为液体, 研究撒克逊碗在液体中的下沉时间. 将 14 个配重小钢球均匀粘贴在碗的底部, 用精密电子秤测量出配重后碗的总质量为  $m = 70.16 \text{ g}$ . 值得注意的是, 由于配重钢珠在液体中也会受到向上方向恒定的浮力, 因此实验中撒克逊碗的有效质量  $m_0$  可认为是配重后碗的总质量扣除配重钢珠所受浮力对应的质量 (即:  $m_0 = m - n\rho V_s$ , 其中,  $n$  表示使用配重钢珠的数量).

将上述撒克逊碗放入自来水中, 使用手机拍摄下沉过程的视频, 利用 Tracker 软件对视频进行逐帧分析, 即可得到碗内液面高度和视频帧数的变化关系. 最后结合每帧所需时间, 得到撒克逊碗下沉时间与碗内液面高度的关系, 如图 5 所示. 实验中, 由于  $n = 14$ , 粘合剂的质量为  $4.6 \text{ g}$ , 因此碗的有效质量为  $m_0 = 58.16 \text{ g}$ .

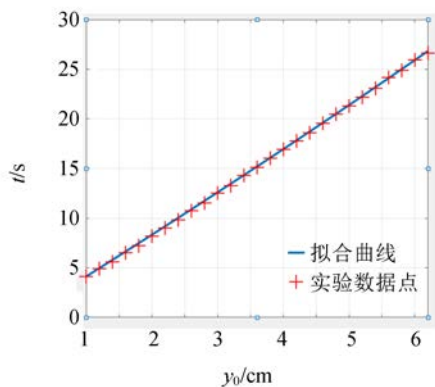


图 5 撒克逊碗下沉时间  $t$  与碗内液面高度  $y_0$  的关系

从图 5 可以看出, 撒克逊碗在水中下沉时, 下沉时间与碗内液面高度呈线性关系, 因此撒克逊碗可以作为有效的计时工具.

图 5 中的拟合曲线是将上述各测量得出的实验参量代入 (20) 式后, 拟合 (仅有 1 个与孔洞的形状以及液体黏度有关的常数  $K$  为待定系数) 实验数据得出的. 拟合得到  $K = 0.057$ .

为了验证上述理论结果以及拟合  $K$  值的正确性, 在其他条件不变的情况下, 仅改变碗的质量 (即改变配重钢珠的数量), 使用上述实验方法, 得到了在不同有效质量下, 撒克逊碗在水中下沉时间随碗内液面高度的变化, 如图 6 所示. 图 6 中, 所有理论曲线, 均是将已知实验参量, 并将图 5 拟合  $K = 0.057$  代入 (20) 式得到的. 可以看出, 理论曲线和实验数据基本吻合, 进一步证明了理论分析结果的正确性. 同时, 从图 6 还可以看出, 在同等条件下, 撒克逊碗的质量越大, 其在水中下沉时间将越短.

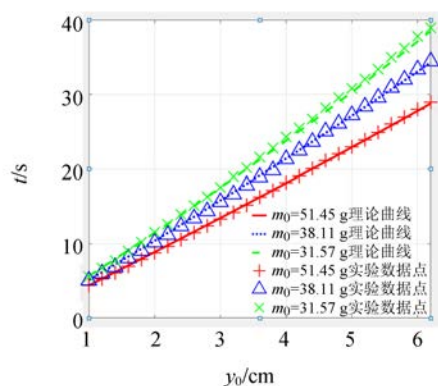


图 6 不同  $m_0$  撒克逊碗下沉时间与碗内液面高度的关系

进一步分析撒克逊下沉所用总时间随撒克逊碗质量之间的变化关系, 如图 7 所示. 从图 7 可以看出, 随着撒克逊碗质量的增加, 其在水中下沉的总时间将非线性地减少.

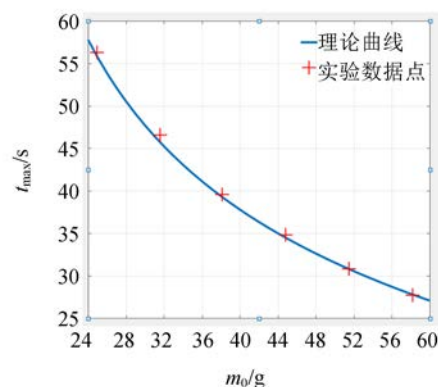


图 7 撒克逊碗下沉总时间与碗质量的关系

下面分析液体密度对撒克逊碗下沉时间造成的影响. 通过在自来水中加入一定量的盐, 即可改变液体的密度 (利用密度计直接测量). 仍然使

用图 5 对应的实验参量及实验方法, 在不同液体密度下撒克逊碗下沉时间随碗内液面高度的变化, 如图 8 和图 9 所示。

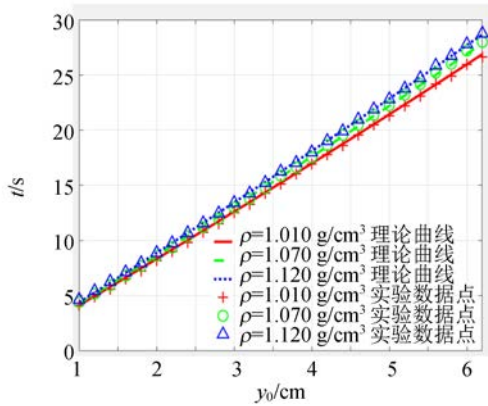


图 8 不同液体密度下, 下沉时间与碗内液面高度的关系

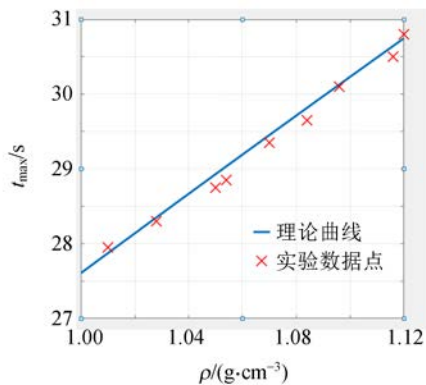


图 9 撒克逊碗下沉总时间与液体密度的关系

从图 8~9 可以看出, 液体密度越大, 则撒克逊碗液面上升单位长度所用的时间将越长。但是液体密度在小幅度变化时, 对撒克逊碗下沉时间造成的影响不大。值得注意的是, 图 8~9 中所用的理论曲线, 均是将上述实验参量代入(20)式后直接得出的。可以看出, 实验结果和理论曲线吻合得较好, 进一步证明了理论分析的正确性。

上述实验研究所用的圆柱形碗为硬质塑料碗, 尽管其形状参比量较容易写出数学关系式, 但是实验过程中也发现, 该类型碗由于材质比较硬, 不便于制作形状、大小相同的孔洞。为了分析撒克逊碗底缺口面积对下沉时间造成的影响, 研究了如图 10 所示的软质塑料碗。这种材质的塑料碗, 可以方便地在其底部制作形状以及大小一致的孔洞。

从理论分析结果(12)式可以看出, 由于图 10

所示碗形状的数学解析表达式无法直接写出, 因此(12)式中的积分部分无法给出任意液面高度时的结果。但是, 一旦碗的形状结构以及碗的高度确定, 则积分量应为一常数值, 即(12)式可改写为

$$t_{\max} = \frac{1}{KS \sqrt{2g}} \int_0^{y_{\max}} \frac{S_{\text{in}}(y)}{\sqrt{h_d}} dy \equiv \frac{C}{S}, \quad (21)$$

其中,  $C$  为常量。可以看出, 撒克逊碗下沉总时间与缺口面积呈反比例函数关系。



图 10 软质撒克逊碗实物图

实际实验中, 可通过 2 种方式增大缺口面积: 一种为直接增大缺口的面积, 另一种为制作若干形状结构相同的孔洞(有利于定量分析)。值得注意的是, 增加形状结构完全相同的孔洞数量后, 可以分别对各个孔洞和液面处建立伯努利方程。从式(3)的具体分析可以看出, 通过增加孔洞的数量, 与只增加 1 个孔洞的缺口面积, 进而使撒克逊碗的缺口面积增大的分析结果是等效的。

为了验证以上结果, 将 16 颗钢珠粘贴在撒克逊碗底部作为配重(图 10), 依次使用大头钉、牙签、直径为 0.225 cm 的笔芯, 由碗内向碗外方向在碗底部同一位置钻出孔洞(即每个孔洞的缺口面积为  $S_0 = 3.98 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ )。钻孔后, 将笔芯固定在孔洞中 24 h 以上, 即可避免开孔过程中软质塑料发生少量的弹性形变以及开孔后软质塑料回弹, 造成孔洞缩小的后果。通过改变孔洞的数量  $\gamma$ , 改变撒克逊碗的缺口总面积  $S = \gamma S_0$ 。

仍然使用密度  $\rho = 1.01 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  的自来水作为液体, 实验测量了图 10 撒克逊碗下沉总时间随孔洞数量(等同于缺口面积)的关系, 如图 11 所示。从图 11 可以看出, 随着孔洞数量(等效于缺口面积)增多, 撒克逊碗下沉总时间将非线性地减小。图 11 的理论曲线是用(21)式拟合得出的, 拟合结果  $C = 465.8 \text{ s} \cdot \text{cm}^2$ 。可以看出, 实验结果和理论预期基本一致。

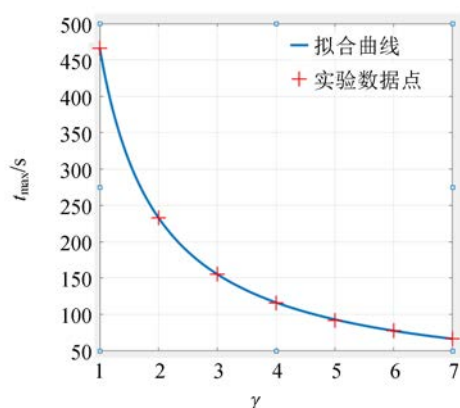


图 11 下沉总时间随缺口面积的变化关系

### 3 结 论

从理论和实验对撒克逊碗计时装置进行了研究,建立了较为简单的物理模型,分析了撒克逊碗下沉时间与碗质量、缺口面积、液体密度的关系.理论分析表明:撒克逊碗底缺口面积越大,或撒克逊碗质量越大,则其在液体中的下沉时间越短.液体密度越大,下沉时间越长,但液体密度对下沉时间的影响并不明显.在理论分析的基础上,制作了2种类型的撒克逊碗,利用Tracker软件对

其下沉时间进行了实验验证,实验结果与理论分析基本一致.

### 参考文献:

- [1] 王兴业. 对盎格鲁-撒克逊人播迁不列颠的历史研究[D]. 上海:华东师范大学,2005.
- [2] 周群体,吴双,周开瑞. 古藏族测时方法[J]. 西南民族学院学报(哲学社会科学版),1995(3):16-19.
- [3] 李强. 马上刻漏考[J]. 自然科学史研究,1990,9(4):334-339.
- [4] 陈宁心,原媛. 古代计时器——水钟[J]. 物理实验,2012,32(2):43-46.
- [5] 沙漏计时器[J]. 计量与测试技术,2019,46(1):121-122.
- [6] Problems for the 33rd IYPT 2020 [EB/OL]. [2020-09-29]. <https://www.iypt.org/problems/problems-for-the-33rd-iypt-2020/>.
- [7] 费恩曼,莱顿,桑兹. 费恩曼物理学讲义(第2卷)[M]. 李洪芳,王子辅,钟万衢,译. 上海:上海科学出版社,2013:557-561,566-578.
- [8] Halliday D, Resnick R, Walker J. Fundamentals of physics [M]. 9th Edition. Hoboken: John Wiley & Sons Inc., 2009:473-477.

## Research on the sinking time of Saxon bowl

ZHONG Shu-he-shan<sup>a</sup>, YI Rong-bin<sup>a</sup>, LI Jin-wen<sup>a</sup>,

FAN Dai-he<sup>a,b</sup>, LIU Qi-jun<sup>a,b</sup>, JIA Xin-yan<sup>a,b</sup>, WEI Yun<sup>a,b</sup>

(a. School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; b. National Demonstration Center for Experimental Physics Education (Southwest Jiaotong University), Chengdu 611756, China)

**Abstract:** The sinking time of Saxon bowl in liquid was investigated both theoretically and experimentally. In theory, through the establishment of the physical model, combined with the hydrodynamics process, the influence of bowl mass, liquid density and gap area on the sinking time of Saxon bowl in liquid was analyzed. The theoretical analysis results showed that, with the increase of the bowl mass or the increase of the bowl gap area, the sinking time of Saxon bowl would be shortened, while the liquid density had little effect on the sinking time. In the experiment, two types of Saxon bowls were made to verify the theoretical analysis results. The experimental results were basically consistent with the theoretical ones, which further proved the correctness of the theoretical analysis.

**Key words:** Saxon bowl; sinking time; gap area; liquid density; IYPT

[责任编辑:任德香]