

文章编号:1005-4642(2021)05-0030-06



一类摩擦振子现象的研究

史雨川^a, 樊代和^{a,b}, 刘其军^{a,b}, 贾欣燕^{a,b}, 魏云^{a,b}

(西南交通大学 a. 物理科学与技术学院, 四川 成都 610031;

b. 物理国家级实验教学示范中心(西南交通大学), 四川 成都 611756)

摘要:从理论和实验两方面研究了第 33 届国际青年物理学家锦标赛中的摩擦振子问题. 建立了物理模型, 通过对摩擦振子系统做受力分析, 得到摩擦振子的运动状态微分方程. 搭建实验系统, 观测摩擦振子的质心变化, 实验结果与理论分析基本一致. 在理论分析的结果基础上, 采用控制变量法, 仿真模拟各参量对摩擦振子运动状态的影响. 研究表明, 摩擦振子系统中物体的质量、圆柱之间的距离及其旋转角速度、圆柱与物体的摩擦因数等参量均会对摩擦振子的运动状态(周期、振幅等)产生影响, 但空气阻力对运动状态的影响不明显.

关键词:摩擦振子; 摩擦因数; 周期; 振幅; IYPT

中图分类号: O313.5

文献标识码: A

DOI: 10.19655/j.cnki.1005-4642.2021.05.005

摩擦振子(Friction oscillator)的研究是第 33 届 IYPT 的竞赛题目之一, 具体内容为: 1 个大块的物体被放置在 2 个相同的平行水平圆柱体上. 2 个圆柱以相同的角速度旋转, 但方向相反. 题目要求研究物体在圆柱体上的运动如何依赖于相关参量^[1].

与摩擦振子相关的研究已有报道. 李鑫等通过 Algodoo 仿真软件探究了摩擦振子的运动规律, 运用理论分析和模拟验证, 得到了运动所依赖的参量与轮轴间距、摩擦因数及初始位置有关的结论^[2], 但没有对理论结果进行实验验证. 袁路奇研究了摩擦振子系统中摩擦力产生的不同方式, 得到了摩擦振子在振动中摩擦因数不停变化的结论^[3]. 秦琅研究了一类非线性摩擦振子的周期运动, 得到系统随参量改变具有不同类型周期运动的结论^[4]. 杨绍普等研究了存在黏性阻尼时摩擦振子的运动状态, 给出了纯滑动的精确解, 并得到振动幅值的解析表达式^[5]. 本文对 IYPT 赛题要求的摩擦振子现象进行理论和实验研究. 通过建立模型并做受力分析, 得出了摩擦振子运动

的状态方程, 通过实验研究证明了理论分析的正确性, 仿真模拟了各参量对摩擦振子的运动状态的影响.

1 理论分析

如图 1 所示, 假设一密度均匀、质量为 m 的长方体, 放置于中心距离为 S 的 2 个直径均为 D 的圆柱上. 当 2 个圆柱分别以顺-逆或者逆-顺时针且以相同的角速度 ω 旋转时, 长方体形成一类摩擦振子. 为了详细分析摩擦振子的运动情况, 建立图 1 所示的直角坐标系, O_c 表示长方体的质心.

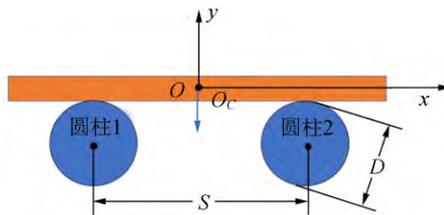


图 1 摩擦振子模型示意图

收稿日期: 2020-10-19

基金项目: 教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会 2020 年高等学校教学研究项目 (No. DJZW202036xn); 西南交通大学第十四期个性化实验项目 (No. GX20201300110001); 2020 年西南地区大学生物理学术竞赛类教育教学改革研究项目 (No. SWPTJG2002)

作者简介: 史雨川 (2000-), 男, 河南新乡人, 西南交通大学物理科学与技术学院应用物理学专业 2018 级本科生. E-mail: 245780622@qq.com

通讯作者: 樊代和 (1981-), 男, 山西河曲人, 西南交通大学物理科学与技术学院副教授, 博士, 研究方向为量子光学. E-mail: dhfan@swjtu.edu.cn



1.1 圆柱 1 和圆柱 2 分别按照顺-逆时针旋转

当 2 个圆柱体以一定角速度 ω 旋转时,上方的长方体将做 x 方向的运动. 假设在某时刻 t ,长方体的质心 O_C 偏离坐标原点的距离为 x ,如图 2 所示. 此时,在竖直方向上,长方体将分别受两圆柱所给支持力 N_1, N_2 以及重力 mg . 运动过程中,长方体还将受到 x 方向的空气阻力 f ,以及圆柱体给的摩擦力 $f_N = f_1 + f_2$.

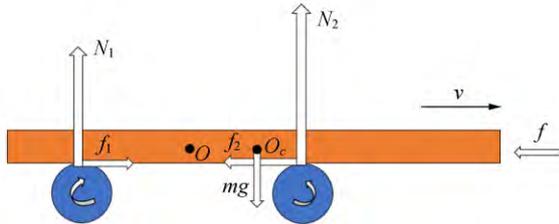


图 2 长方体运动过程中某一时刻的受力分析图

分别将圆柱 1、圆柱 2 作为长方体的支点,则在长方体不倾倒(即长方体不倾斜脱离圆柱体)的情况下,根据力矩平衡,可得:

$$N_1 S = mg \left(\frac{S}{2} - x \right), \tag{1a}$$

$$N_2 S = mg \left(\frac{S}{2} + x \right). \tag{1b}$$

在水平方向上,由牛顿第二定律可得出长方体的运动方程为

$$f_N + f = m \frac{d^2 x}{dt^2}. \tag{2}$$

长方体在运动过程中受到的空气阻力 f 与速度的平方成线性关系^[6],因此有

$$f = -\eta \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right|, \tag{3}$$

其中, $\eta = C\rho A/2$, C 为垂直平面体空气阻力系数, ρ 为空气密度, A 为长方体迎风横截面积.

对本文的模型来说,木板在往复运动中速度不断变化,2 个圆柱相对匀速转动,不会发生无滑滚动的情况,同时不考虑形变所致的滚动摩擦,即只考虑滑动摩擦^[7],则

$$f_N = f_1 + f_2 = \mu_1 N_1 + (-\mu_2 N_2), \tag{4}$$

其中, μ 为滑动摩擦因数.

下面详细分析摩擦振子中长方体受到的滑动摩擦力 f_N . 一般情况下,可认为滑动摩擦因数 μ 是常量,但本文中滑动摩擦力是驱动长方体运动的关键量,且在实际情况下,滑动摩擦因数由于相对速度等的变化而改变,最终导致其具体表达式

较为复杂. 受参考文献[8]的启发,假设长方体滑动摩擦因数与相对速度 u 之间具有线性关系:

$$\mu = a + bu, \tag{5}$$

其中 a 和 b 为与物体表面性质有关的常量.

在如图 2 所示的模型中,长方体和圆柱 1、圆柱 2 之间的相对运动速度 u_1 和 u_2 可分别写为:

$$u_1 = v_r - \frac{dx}{dt}, u_2 = v_r + \frac{dx}{dt}. \text{ 其中, } v_r = \frac{\omega D}{2} \text{ 为圆柱外}$$

围的线速度, $\frac{dx}{dt}$ 为长方体在 t 时刻的速度. 根据

以上分析,则长方体所受的滑动摩擦力 f_N 可以写为

$$f_N = \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = -\frac{2mg}{S}(a + bv_r)x - bmg \frac{dx}{dt}. \tag{6}$$

分别将(3)和(6)式代入(2)式,得到圆柱 1、圆柱 2 分别按照顺-逆时针旋转情况下,长方体的运动状态方程为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + bg \frac{dx}{dt} + \frac{\eta}{m} \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| + \frac{g}{S}(2a + 2bv_r)x = 0. \tag{7}$$

1.2 圆柱 1 和圆柱 2 分别按照逆-顺时针旋转

此情形下长方体的运动过程与 1.1 情况不同之处只有摩擦力的方向发生改变,因此 1.1 情况中的(1)和(2)式以及长方体所受到的空气阻力(3)式在此情况下仍适用.

当圆柱 1 和圆柱 2 分别按照逆-顺时针旋转时,长方体受到的滑动摩擦力 f_N 表达式为

$$f_N = -\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 = \frac{2mg}{S}(a + bv_r)x + bmg \frac{dx}{dt}. \tag{8}$$

分别将(3)和(8)式代入(2)式,可得到当圆柱 1 和圆柱 2 分别按照逆-顺时针旋转时,长方体的运动方程为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - bg \frac{dx}{dt} + \frac{\eta}{m} \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| - \frac{g}{S}(2a + 2bv_r)x = 0. \tag{9}$$

2 实验探究

实验使用 2 个直径 $D = 7.43 \text{ cm}$ 的圆柱,以及长度 $l = 45.23 \text{ cm}$ 、宽度 $w = 2.04 \text{ cm}$ 、厚度 $d = 1.53 \text{ cm}$ 的长方体木条,组成摩擦振子系统.

2.1 测量圆柱与长方体之间的滑动摩擦因数

如图 3 所示,将两圆柱靠近并固定在一根线

上,并用胶带固定圆柱使其无法转动.再调节该直线与水平方向呈一定的角度 θ ,使长方体在圆柱上面自由滑落.

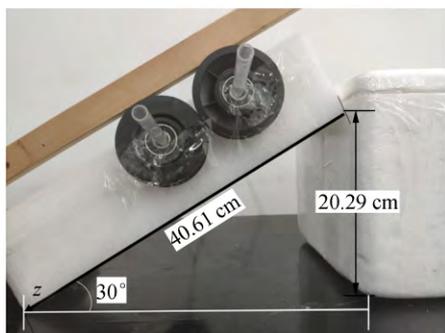


图 3 测量滑动摩擦因数实验装置图

取木块运动的方向为 z 轴正向,根据简单的受力分析,可得到长方体下落的加速度为

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g \sin \theta - \mu g \cos \theta. \quad (10)$$

由于圆柱被固定无法旋转,因此圆柱与长方体的相对速度即为长方体自身的速度,即 $u = dz/dt$,结合(5)和(10)式,得出:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g \sin \theta - \left(a + b \frac{dz}{dt} \right) g \cos \theta. \quad (11)$$

实验中,设置 $\theta = 30^\circ$,将长方体下落的过程拍摄视频,并利用 Tracker 软件逐帧分析视频,得到长方体质心随时间变化数据.使用 Matlab 软件,利用(11)式对实验数据进行拟合,如图 4 所示,证明了(5)式假设的正确性.同时,通过拟合实验数据,得到(5)式中与物体表面性质有关的常数值分别为 $a = 0.266, b = -0.009$.

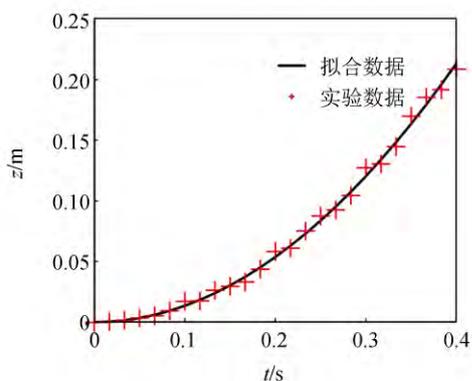


图 4 下落过程中长方体质心的变化

2.2 分析实验条件下的空气阻力系数相关常量 η

垂直平面体空气阻力系数可认为 $C \approx 1.0^{[9]}$,

空气密度为 $\rho \approx 1.3 \text{ kg/m}^3$,长方体迎风面积为 $A = wd = 3.12 \text{ cm}^2$.根据以上数据,计算得出 $\eta \approx 0.00020$.

2.3 圆柱 1 和圆柱 2 分别按不同方式旋转摩擦振子的质心变化

实验装置如图 5 所示,用绳索反向连接两圆柱,使两圆柱获得大小相等方向相反的角速度,用电机控制圆柱体的转速.质量 $m = 16.4 \text{ g}$ 的长方体放置于间距 $S = 30.00 \text{ cm}$ 的两圆柱上,并设置圆柱体以 $\omega = 66.0 \text{ r/min}$ 旋转,从而驱使长方体运动.此时,圆柱外围线速度为 $v_r = \omega D/2 = 0.257 \text{ m/s}$.

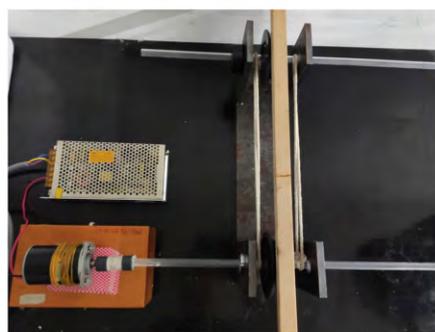


图 5 摩擦振子实验装置示意图

对于圆柱 1 和圆柱 2 分别按照顺-逆时针旋转的情况,将长方体放置在两圆柱上,令 $x|_{t=0} = 4.00 \text{ cm}$,使圆柱开始旋转.通过 Tracker 软件测量长方体质心随时间的变化情况,实验结果如图 6 所示.实线是将上述各参量代入(7)式后得到的理论曲线.

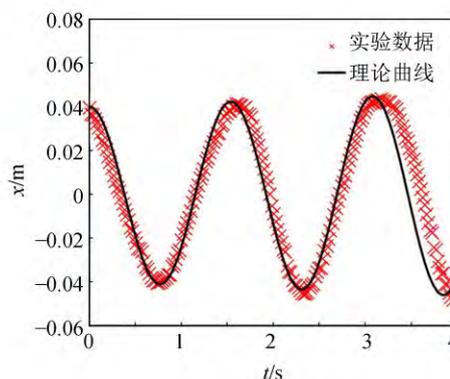


图 6 顺-逆时针旋转 $m = 16.4 \text{ g}$ 时摩擦振子的质心变化

从图 6 中可以看出,长方体的运动轨迹近似为余弦曲线,但实际振幅在缓慢增大,即摩擦振子

做振幅变化的往复振动. 从图 6 也可以看出,实验数据与理论分析得到的曲线基本吻合,证明了(7)式的正确性.

为了进一步证明上述理论分析的正确性,保持其他实验参量不变,仅改变长方体的质量为 $m=21.3\text{ g}$,重复上述实验. 图 7 显示实验结果和理论曲线基本一致.

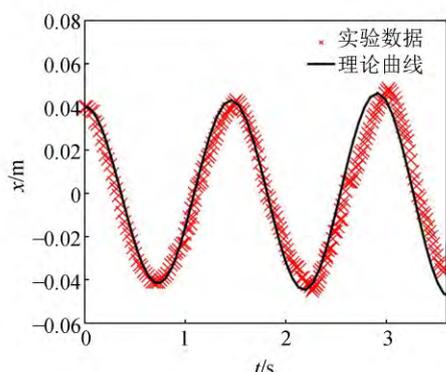


图 7 顺-逆时针旋转 $m=21.3\text{ g}$ 时摩擦振子的质心变化

选用 $m=16.4\text{ g}$ 的长方体作为摩擦振子,在 $x|_{t=0}=1.00\text{ cm}$ 时,设置圆柱以 $\omega=66.0\text{ r/min}$ 开始旋转. 通过 Tracker 软件得到摩擦振子的质心随时间变化情况,结果如图 8 所示,实线是将上述已知参量代入(9)式后得到的理论曲线. 从图 8 中可以看出,实验数据与理论曲线吻合度较高,进一步证明了理论分析的正确性.

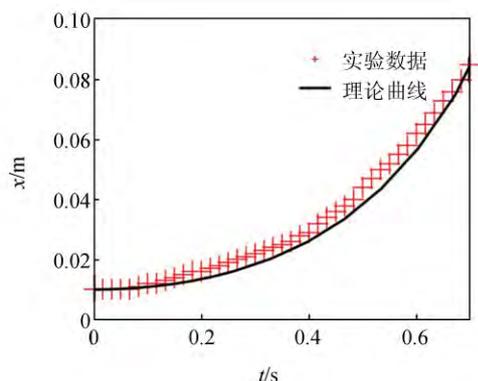


图 8 逆-顺时针旋转 $m=16.4\text{ g}$ 时摩擦振子的质心变化

同时,从图 8 中也可以看出,在圆柱 1 和圆柱 2 分别按照逆-顺时针旋转情况下,由于长方体运动过程中将不断远离两圆柱轴心位置,最终脱离圆柱系统,此时不存在振动现象. 本文重点研究的是摩擦振子现象,所以圆柱 1 和圆柱 2 分别

按照逆-顺时针旋转这种情况将不再分析.

3 仿真模拟

上述实验结果已经证明了理论分析(7)式和(9)式的正确性. 当摩擦振子系统中某些参量变化时,长方体的运动状态也将随之改变. 受到当前实验条件的限制,采用控制变量法,基于理论结果对摩擦振子现象进行仿真模拟.

3.1 两圆柱轴线距离 S 发生变化时,摩擦振子的运动情况

参量 S 主要通过改变长方体所受支持力产生影响,从而对滑动摩擦产生影响. 当 $m=16.4\text{ g}$,其他参量的设置与上述实验相同,在圆柱 1 和圆柱 2 分别按照顺-逆时针旋转的情况下,将初始条件设置为 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0}=0$ 和 $x|_{t=0}=4.00\text{ cm}$,对(7)式进行求解,得到 S 取不同值时摩擦振子的运动曲线如图 9 所示.

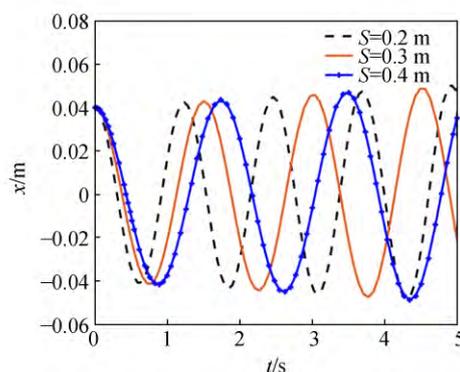


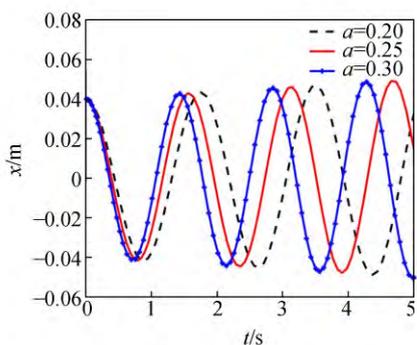
图 9 S 取不同值摩擦振子的质心变化

从图 9 中可以看出,两圆柱轴间距 S 越大,则摩擦振子往复运动的周期就越大. 同时,随着运动时间的增加,两圆柱轴间距 S 越大,摩擦振子运动的振幅也越大.

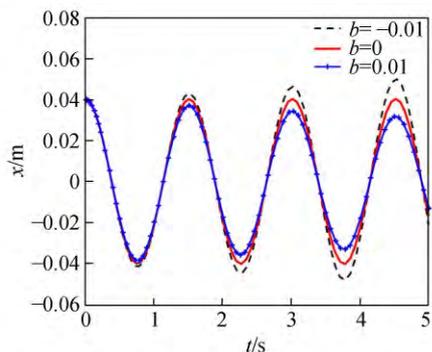
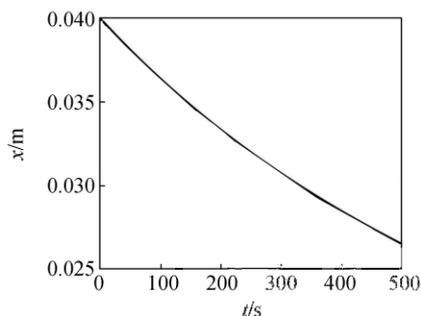
3.2 长方体在具有不同滑动摩擦因数 μ 时的运动情况

由于 μ 中含有 a 和 b 参量,因此分析 a 和 b 单独变化时摩擦振子的运动情况.

选取 $m=16.4\text{ g}$, $S=30.00\text{ cm}$, $b=-0.009$,其他参量与上述实验研究时数值保持一致,当初始条件为 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0}=0$, $x|_{t=0}=4.00\text{ cm}$ 时,摩擦振子的运动结果如图 10 所示. 从图 10 中可以看出, a 值越大,摩擦振子往复运动的周期就越小.

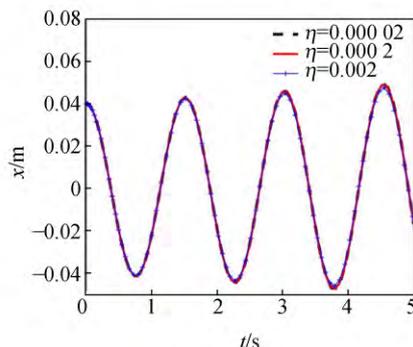
图 10 a 取不同值摩擦振子的质心变化

在相同实验参量条件下,当固定 $a=0.266$,仅改变 b 值时,根据(7)式可得到摩擦振子运动曲线如图 11 所示.由图 11 可以看出, b 值并不会影响摩擦振子运动的周期.当 $b>0$ 时,随着运动时间的增加,摩擦振子运动的振幅将迅速减少;当 $b<0$ 时,随着运动时间的增加,摩擦振子运动的振幅将迅速增大;当 $b=0$ 时,随着运动时间的增加,摩擦振子运动的振幅在短时间内基本保持不变,可认为长方体近似做简谐运动.但是,即使 $b=0$,随着运动时间的增加,实际上摩擦振子往复运动的振幅也将减小,仿真结果如图 12 所示.这是由于空气阻力的存在,对摩擦振子运动造成了阻尼所致.

图 11 b 取不同值摩擦振子的质心变化图 12 $b=0$ 时,摩擦振子长时间运动质心的振幅变化

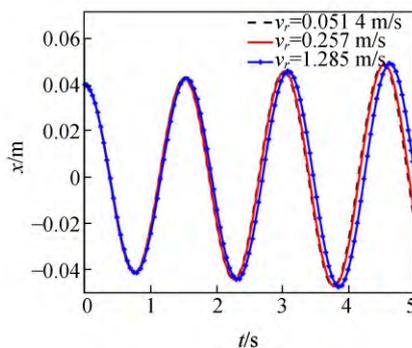
3.3 空气阻力系数 η 对摩擦振子运动的影响

保持上述各实验参量不变,仅改变(7)式中 η 的取值,摩擦振子的运动情况如图 13 所示.从图 13 可以看出,空气阻力系数 η 的改变基本不影响摩擦振子的运动状态,即一般条件下的空气阻力对长方体运动的影响极其微小.

图 13 η 取不同值时摩擦振子的质心变化

3.4 当圆柱外围线速度 v_r 变化时摩擦振子的运动

保持上述各实验参量不变,仅改变(7)式中 v_r 的取值(即改变圆柱体运动的角速度 ω),摩擦振子的运动情况如图 14 所示.

图 14 v_r 取不同值时摩擦振子的质心变化

从图 14 可以看出, v_r 的微小变化对摩擦振子运动的影响较小.但随着 v_r 的大幅度增加,摩擦振子质心运动的周期将稍变长,且随着运动时间的增加,摩擦振子质心的运动振幅也将增大.

说明:本文的理论模型,假设长方体只在水平方向上运动,但在实际运动过程中,长方体在竖直方向有微小幅度的振动,这会导致其受到的支持力产生变化,进而造成实验结果和理论结果的微小偏差.此外,实验数据通过 Tracker 软件获得,软件分析的精确度也会导致实验数据与理论分析之间存在偏差.

4 结束语

对第33届IYPT赛题中摩擦振子进行了理论和实验的研究。建立了摩擦振子的运动模型,通过对摩擦振子的受力和运动状态分析,从理论上得出了当圆柱体分别按照顺-逆时针和逆-顺时针旋转时,摩擦振子的运动状态微分方程。实验搭建了摩擦振子系统,并对理论分析结果进行了实验研究,实验结果和理论分析基本一致。

参考文献:

- [1] Problems for the 33rd IYPT 2020 [EB/OL]. [2020-10-19]. <https://www.iypt.org/problems>.
- [2] 李鑫,范婷,杨坤,等. 仿真环境下“摩擦振子”运动规律探究[J]. 物理通报,2020(9):84-87.
- [3] 袁路奇. 一类摩擦振子的动力学行为分析[D]. 南宁:广西大学,2018.
- [4] 秦琅. 几何非线性干摩擦振子动力学研究[D]. 成都:西南交通大学,2018.
- [5] 杨绍普,郭树起. 一类摩擦振子的纯滑动运动分析[J]. 振动与冲击,2009,28(10):43-48.
- [6] 漆安慎,杜婵英. 普通物理学教程·力学[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2005:409-410.
- [7] 刘正林. 摩擦学原理[M]. 北京:高等教育出版社,2009:101-103.
- [8] 温诗铸,黄平. 摩擦学原理[M]. 3版. 北京:清华大学出版社,2012:241-243.
- [9] 刘扬正,钱仰德. 测定不同形状物体空气阻力系数的实验[J]. 大学物理,2017,36(3):16-19,24.

Research on one kind of friction oscillator phenomenon

SHI Yu-chuan^a, FAN Dai-he^{a,b}, LIU Qi-jun^{a,b}, JIA Xin-yan^{a,b}, WEI Yun^{a,b}

(a. School of Physical Science and Technology, Chengdu 610031, China;

b. National Demonstration Center for Experimental Physics Education

(Southwest Jiaotong University), Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract: The friction oscillator problem of the 33rd International Young Physicists Tournament (IYPT) was investigated theoretically and experimentally. The physical model was established, and the differential equation of the motion of the friction oscillator was obtained theoretically. The experimental system was built, and the changes of mass centre were measured. The experimental results were consistent with the theoretical analysis. According to the theoretical analysis, the influence of physical parameters on the friction oscillator was simulated by control variable method. Results indicated that the mass of the object, the distance between the two cylinders and the angular velocity of rotation, the friction coefficient between the cylinder and the object would all affect the state of the motion of the friction oscillator, such as the period, amplitude, etc. In contrast, the air resistance had little effect on the friction oscillator.

Key words: friction oscillator; friction coefficient; period; amplitude; IYTP

[责任编辑:任德香]