

文章编号: 1005-4642(2022)06-0021-05

基于泰伯效应测量光栅常量

李冬至¹, 刘忠菊², 伍豪佳², 梁禄业², 李博琛², 赵 骞²

(1. 广东工业大学 先进制造学院, 广东 揭阳 522000; 2. 沈阳工业大学 理学院, 辽宁 沈阳 110870)

摘 要: 利用泰伯效应光栅自成像的周期性特点, 借助 LabVIEW 软件实现自动化采集并实时分析数据, 运用基础光机电元器件测量了一维光栅的光栅常量. 通过自动化采集探测器移动过程中图像整体对比度的变化, 获得实时对比度曲线, 通过多个相邻的最大峰值位置获取周期图像平均间距得到泰伯距离, 从而计算出光栅常量. 该实验具有装置和操作简单、精度高、自动化程度高和图像可视化等特点.

关键词: 泰伯效应; 光栅常量; 自成像; 对比度

中图分类号: O436.1; TN247

文献标识码: A

DOI: 10.19655/j.cnki.1005-4642.2022.06.004

泰伯效应(Talbot effect)由 Henry Fox Talbot 于 1836 年首次观察到^[1]. 当平面波入射到周期性衍射光栅时, 在远离光栅平面周期规则的距离处, 光栅图像重复出现, 也称为自成像或无透镜成像^[2-3]. 在光学领域, 自成像一直是图像处理^[3-4]、空间滤波器^[5]和光学测量^[6]的热点, 在多个研究领域中都有应用, 例如声学^[7]、电子显微镜^[8]、等离子体^[9]、X 射线^[10]和玻色-爱因斯坦凝聚^[11].

泰伯效应是一种衍射效应, 周期规则的距离称为泰伯长度, 重复出现的图像称为泰伯正像. 此外, 在泰伯长度的 1/2 处, 也会出现泰伯负像, 即相移了 1/2 个周期^[12](光栅周期宽度横向移动了 1/2). 随着探测器位置变化, 当所成的像为正像或负像时, 图像最清晰且对比度出现极大值, 每 2 个正像间距或负像间距即为泰伯距离^[13], 而图像最不清晰且对比度处于极小值时, 则处于正像与负像两者中间. 另外, 相邻正像和负像之间也会有自成像现象, 在泰伯距离 1/4 处, 自成像大小减半, 并间隔 1/2 个光栅周期出现, 对比度也相应降低, 在泰伯距离 1/8 处, 图像的周期和大小再次减半, 对比度更低, 最终形成地毯状图案(Talbot

carpet)^[14]. 因此, 当对所成的像进行对比度分析时, 由于存在周期性的特点, 测量正像或负像对比度极大值所对应的探测器位置之间的间隔, 即可以得到 1/2 个泰伯距离的长度. 根据衍射理论可知, 泰伯距离与光栅常量和光的波长有关. 若已知入射光的波长, 通过实验图像对比度曲线可测得平均泰伯距离, 进而求出光栅常量.

1 实验原理

根据菲涅耳衍射理论可知, 对于具有周期性结构的物体, 可给出透过率函数. 以图 1 所示一维周期性光栅为例, 设其透过率函数为

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi \frac{n}{d} x}, \quad (1)$$

其中, n 取整数, C_n 表示各平面波分量的相对振幅与相位分布, d 为光栅常量, x 为平行光栅的观察平面到原点的坐标距离.

当采用单位振幅的平面光波垂直照射周期性结构物体时, 靠近此物体的光场分布即为 $t(x)$, 可以视为离散值 $(\frac{n}{d}, 0)$ 的无穷多平面波分量的线性叠加. 研究和该物体相距为 z 的观察平面上

收稿日期: 2021-09-24; **修改日期:** 2021-12-08

基金项目: 辽宁省科技厅科技计划指导计划类项目(No. 2019-ZD-0199); 辽宁省教育厅科学研究经费项目(面上项目)(No. LJKZ0159)

作者简介: 李冬至(1982-), 男, 辽宁鞍山人, 广东工业大学先进制造学院讲师, 博士, 主要研究方向为光学检测与成像. E-mail: lidongzhi@tsinghua.org.cn

通讯作者: 刘忠菊(1982-), 男, 辽宁鞍山人, 沈阳工业大学理学院副教授, 博士, 主要研究方向为腔 QED 系统的量子模拟和量子开放系统研究. E-mail: liuzhongju10@163.com

的光场分布,依据菲涅耳衍射公式^[15]

$$U_0(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U_1(x_1, y_1) h(x_0 - x_1, y_0 - y_1) dx_1 dy_1 = U_1(x_1, y_1) * h(x_0, y_0), \quad (2)$$

观察屏上的光场可以表示为

$$U_0(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} t(x_0) * e^{i\frac{k}{2z}x_0^2}. \quad (3)$$

式(3)是卷积运算形式,通过傅里叶变换并应用卷积定理,得

$$\mathcal{F}\{U_0(x_0, y_0)\} = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \mathcal{F}\{t(x)\} \cdot \mathcal{F}\{e^{i\frac{k}{2z}x_0^2}\}, \quad (4)$$

其中,

$$\mathcal{F}\{t(x)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta\left(f_x - \frac{n}{d}\right),$$

$$\mathcal{F}\{e^{i\frac{k}{2z}x^2}\} = \mathcal{F}\{e^{i\pi(\frac{x}{\sqrt{\lambda z}})^2}\} = \sqrt{\lambda z} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\pi\lambda z f_x^2}.$$

式(4)用到了编码脉冲信号的傅里叶变换式以及相似性定理,代入式(2)得

$$\mathcal{F}\{U_0(x_0, y_0)\} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{i\sqrt{\lambda z}} e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z (\frac{n}{d})^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta\left(f_x - \frac{n}{d}\right). \quad (5)$$

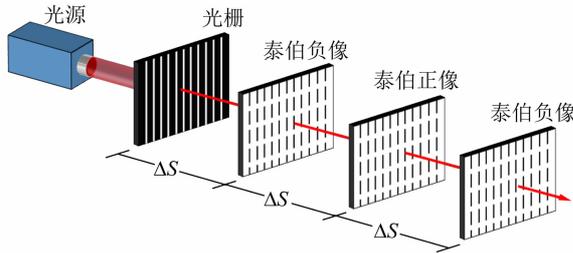


图 1 泰伯效应原理说明

对于频率为 $(\frac{n}{d}, 0)$ 的平面波分量,在观察平面上仅引入了相移 $e^{[-i\pi\lambda z (\frac{n}{d})^2]} e^{ikz}$. 只有当距离满足

$$z = \begin{cases} \frac{2md^2}{\lambda}, & \text{泰伯正像} \\ \frac{(2m-1)d^2}{\lambda}, & \text{泰伯负像} \end{cases} \quad (m=1, 2, 3, \dots), \quad (6)$$

才可得到光栅像,则有 $e^{-i\pi\lambda z (\frac{n}{d})^2} = 1$,从而得到泰伯距离为

$$\Delta z = \frac{2d^2}{\lambda}, \quad (7)$$

因此,泰伯相邻正像与负像间距(泰伯距离的1/2)为 $\Delta s = d^2/\lambda$. 如果已知波长 λ ,则可求得光栅常量为

$$d = \sqrt{\lambda \Delta s}. \quad (8)$$

2 实验设计与实现

由式(7)可知,泰伯距离与光栅常量之间存在联系,使用平行光源照射光栅,沿光轴方向移动相机,记录所成的光栅图像. 分析获得的图像,得出泰伯距离与光栅常量之间的具体数值关系,更换不同线数光栅进行测量,计算出平均值,验证实验的可靠性.

本实验光源要求为单色平行光源,即单色平面波,若以单色球面波照射周期性结构的物体时,泰伯距离 Δz 满足

$$\frac{R\Delta z}{R + \Delta z} = \frac{2md^2}{\lambda}, \quad (9)$$

其中, R 为球面波在泰伯像处的半径,只有 $R \gg \Delta z$ (单色平面波)时,泰伯距离才为等间距,计算得到的平均泰伯距离才有意义. 此外,非相干光源照明不会影响实验,因为信号来源于衍射光线干涉的结果,故本实验可在普通照明环境下进行.

如图2所示,氦氖激光器($\lambda = 632.8 \text{ nm}$)发出的激光经扩束镜后变为平行光,再经过滤光片去除杂散光的影响,将其照射到光栅,在沿光栅向后的方向不断移动探测相机,探测相机就会接收到周期性变化的图像,再利用 LabVIEW 软件在计算机屏幕上实时显示,并对接收到的图像中心 400×400 像素点区域实时计算光强二阶中心矩,将其作为对比度(当采集像素点数足够多,像素光强的二阶中心矩等价于方差^[16])来表示所统计图像区域内的同质性^[17](像素视觉的显著性或平滑性):

$$M_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu)^2, \quad (10)$$

其中, M_2 为二阶矩, N 为输入图像像素个数, x_i 为第 i 个像素点的光强值, μ 为总体像素光强的均值. 以此统计数值来表征图像对比度,从而形成对比度-探测相机位置曲线.

实验中采用 LabVIEW 软件的逐点寻峰函数实时记录每个对比度峰对应该处探测相机移动的位置,每2个峰之间的距离就是泰伯正负像间距. 当探测相机移动距离逐渐增大时,接收到的信号强度受周围杂散光的影响增大,从而会导致图像信噪比降低. 因此,根据丝杠导轨的长度只选取

从测量开始的几个峰值的间距,再取平均值作为泰伯正负像间距,以此确定对比度随探测器移动变化曲线的峰值,分析每个峰之间的距离并求出正负像的平均间隔 Δs ,代入式(8),得到光栅常量.

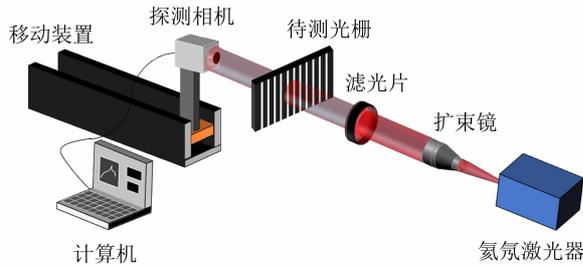


图 2 实验原理光路示意图

图像获取、控制探测相机移动、计算二阶矩、自动寻峰和结果计算均由 LaVIEW 软件编写程序完成,全程自动化采集处理,从而去除了人为因素的干扰.

为实现相机沿光轴方向移动,利用步进电机来控制探测相机移动. 采用的步进电机上的丝杠螺距为 4 mm,在非细分的情况下,1 个脉冲对应转动 1.8° ,驱动器采用 4 细分,由于每个脉冲对应行进距离为 0.005 mm,故 20 个脉冲对应的行进距离为 0.1 mm,为实时分析图像位置提供了探测相机移动距离的数据参考.

标识为 10 线的待测光栅,理论上的光栅常量 $d=0.1$ mm,但实验得到的光栅常量测量值与标识值存在较大偏差,这可能是低线数光栅的生产精度不高和使用过程中的损耗造成的. 利用实验室现有的机器视觉综合测量系统测量此光栅,具体步骤为:

1)将标准板置于机器视觉综合测量系统中,标准板上 2 个相邻点间的距离为 0.1 mm (标准距离).

2)对标准板图像进行拍摄,计算 0.1 mm 所对应的像素点个数,从而得到单个像素点对应的长度约为 0.015 82 mm.

3)将待测光栅置于仪器中,拍摄图像,并选取多个光栅线对进行计算(选取拍摄清晰的连续 48 个光栅线对),得出对应的像素点个数为 299.

因此,该 10 线光栅的 $d \approx 0.098 5$ mm,与标识值确有偏差.

3 数据测量与分析

3.1 实验测量 10 线光栅的光栅常量

图 3 所示为 LabVIEW 软件操作界面,左侧为实验实时图像及横向光强分布图,右侧为 400×400 像素中心矩所得到的对比度-探测相机位置曲线,可以观察到曲线除了 5 个主峰外,在 1 个泰伯距离内还存在一些很有规律的次峰,这些次峰是由衍射和干涉形成的周期子图像造成的. 通过确定对比度主峰的位置,可以确定泰伯距离,由于测量精度等原因,这些子图像成像时的对比度峰显现效果较差,但对实验的最终结果没有影响.

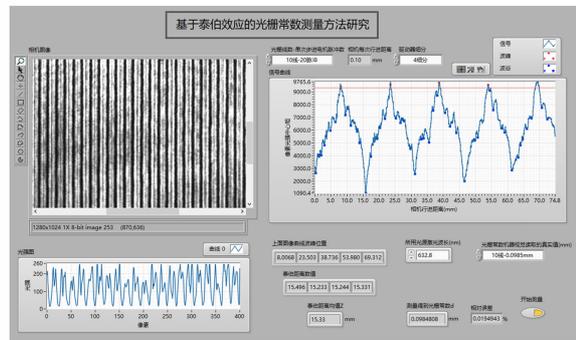


图 3 LabVIEW 软件界面

通过以上方法得到的测量结果如表 1 所示. 根据表 1 中的数据求得平均相邻峰值为 15.326 mm,代入式(8),计算可得光栅常量 $d_1 = (0.098 4 \pm 0.000 2)$ mm. 利用机器视觉系统测量得到该光栅的光栅常量为 0.098 5 mm. 经比较,2 种不同方法得到的结果非常接近,证明了该实验方法的有效性.

表 1 10 线光栅的测量结果

峰位置/mm	峰差/mm	峰位置/mm	峰差/mm
8.007	—	53.980	15.244
23.503	15.496	69.312	15.331
38.736	15.233		

3.2 实验测量 25 线光栅的光栅常量

为进一步验证实验方法的可靠性,对标识为 25 线光栅的光栅常量进行测量,测量结果如表 2 所示. 根据表 2 中的数据求得平均相邻峰值为 2.531 mm,代入式(8),计算可得光栅常量 $d_2 = (0.040 0 \pm 0.000 2)$ mm,得到的结果与利用机器

视觉系统测量得到的光栅常量(0.039 9 mm)接近,进一步证明了该实验方法的有效性.

表 2 25 线光栅的测量结果

峰位置/mm	峰差/mm	峰位置/mm	峰差/mm
39.152	—	49.272	2.561
41.603	2.451	51.805	2.533
44.216	2.613	54.339	2.534
46.711	2.495		

4 结 论

基于泰伯效应测量光栅常量的方法和装置,可实现实时监控和自动化采集测量,装置结构简单、测量结果误差小、准确度高,且与机器视觉系统的测量结果接近,证明本文实验方法的有效性.该实验装置既可用于物理光学实验教学,又可用于对光栅或其他周期性物体的质量检测.另外,本实验还能够帮助学生掌握自动化测量的实验思路和方法,并加强学生对泰伯效应实验过程的理解.

参 考 文 献:

- [1] Talbot H F, Esq F R S. Facts relating to optical science. No. IV [J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1836,9(56):401-407.
- [2] Montgomery W D. Self-imaging objects of infinite aperture [J]. Journal of the Optical Society of America, 1967,57(6):772-778.
- [3] Paturski K. I the self-imaging phenomenon and its applications [J]. Progress in Optics, 1989,27(1):1-108.
- [4] Cowley J M. Diffraction physics [M]. Third Edition. Netherlands: North-Holland, 1995:26-35.
- [5] Hayasaki Y, Yamamoto H, Nishida N. Selection of optical patterns using direct modulation method of spatial frequency in a nonlinear optical feedback system [J]. Optics Communications, 2001,187(1/3):49-55.
- [6] Sanchez-Brea L M, Torcal-Milla F J, Bernabeu E. Talbot effect in metallic gratings under Gaussian illumination [J]. Optics Communications, 2007,278(1):23-27.
- [7] Morozov A N, Krikunova M P, Skuibin B G, et al. Observation of the Talbot effect for ultrasonic waves [J]. JETP Letters, 2017,106(1):23-25.
- [8] Nango N, Kubota S, Hasegawa T, et al. Osteocyte-directed bone demineralization along canaliculi [J]. Bone, 2016,84:279-288.
- [9] Farhadi S, Farmani A, Hamidi A. Figure of merit enhancement of surface plasmon resonance biosensor based on Talbot effect [J]. Optical and Quantum Electronics, 2021,53(9):1-13.
- [10] Yashiro W. Hard X-ray imaging microscopy with self-imaging phenomenon [J]. Microscopy, 2018,67(6):303-316.
- [11] Makhlov V B, Turlapov A V. Quantum Talbot effect for a chain of partially correlated Bose-Einstein condensates [J]. JETP Letters, 2019,109(8):552-557.
- [12] Leger J R. Lateral mode control of an AlGaAs laser array in a Talbot cavity [J]. Applied Physics Letters, 1989,55(4):334-336.
- [13] Kafri O, Keren E, Livnat A. Measurement of low density transmission gratings by moire deflectometry: Hybrid Talbot effect [J]. Applied Optics, 1987,26(1):28-29.
- [14] Case W B, Tomandl M, Deachapunya S, et al. Realization of optical carpets in the Talbot and Talbot-Lau configurations [J]. Optics Express, 2009,17(23):20966-20974.
- [15] Born M, Wolf E. Principles of optics [M]. Sixth Edition. Pergamon: Pergamon Press, 1980:370-458.
- [16] Schervish M J, DeGroot M H. Probability and statistics [M]. London: Pearson Education, 2014:417-441.
- [17] Yang J, Zhu G, Shi Y Q. Analyzing the effect of JPEG compression on local variance of image intensity [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2016,25(6):2647-2656.

Measuring grating constant based on Talbot effect

LI Dong-zhi¹, LIU Zhong-ju², WU Hao-jia², LIANG Lu-ye², LI Bo-chen², ZHAO Qian²

(1. School of Advanced Manufacturing, Guangdong University of Technology, Jieyang 522000, China;

2. School of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870, China)

Abstract: Taking advantage of the periodicity of Talbot effect grating self-imaging, with the help of LabVIEW to realize automatic collection and real-time data analysis, basic optical and electromechanical components were used to accurately measure the grating constants of one-dimensional gratings. The real-time contrast curve was obtained by the change of the overall contrast of the image during the movement of the detector. And the Talbot distance was obtained by obtaining the average spacing of periodic images through multiple adjacent maximum peak positions, thereby calculating the grating constant. The experiment had the characteristics of simple device and operation, high precision, high degree of automation and image visualization.

Key words: Talbot effect; grating constant; self-imaging; contrast

[责任编辑:郭 伟]

(上接 20 页)

Optical path analysis of four-order rainbows by the sunlight through the fish tank

LIU Xin-jun

(Department of Physics, School of Science, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

Abstract: The equivalent optical path diagram of the four-order rainbows phenomena on the indoor wall and ceiling by sunlight passing through a rectangular glass fish tank was studied by using the geometric optics method. The relationship between the orders of rainbow and the solar altitude angle, the inclination angle of the bottom of the fish tank, the water depth and the water surface width was analyzed. In addition, the missing orders caused by total reflection and the missing color of the rainbow (starting from purple) were also explained.

Key words: rainbow; geometrical optics; dispersion; prism; missing orders

[责任编辑:郭 伟]