

文章编号:1005-4642(2022)06-0014-07



普通物理实验

阳光透过鱼缸投射出4级彩虹的光路分析

刘新军

(天津大学理学院物理系,天津 300350)

摘要:利用几何光学研究了阳光透过矩形玻璃鱼缸在墙上以及天花板上产生4级彩虹现象的等效光路图,分析了彩虹级数与太阳高度角、鱼缸底面倾角、水深以及水面宽度之间的关系,解释了由全反射引起的缺级以及彩虹部分颜色缺失(先从紫色开始缺失)的现象.

关键词:彩虹;几何光学;色散;三棱镜;缺级

中图分类号: O435.1

文献标识码: A

DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2022.06.003

在利用矩形玻璃鱼缸制造水三棱镜观察彩虹的文章中,分析了春分时节观察到彩虹产生的光路^[1].由计算可知,当太阳高度角为 50° ,鱼缸底面倾角为 4.54° 时,在距离鱼缸 5.7 m 远的墙上可以观察到纵向宽度达米量级的鲜艳彩虹($\Delta\lambda < 2.97\text{ nm}$),此时红光和紫光的出射角分别为 79.23° 和 89.64° (紫光刚好从水面水平出射).当太阳高度角增大时,鱼缸底面倾角需要适当减小,墙上彩虹的纵向宽度才能达到米量级.

处暑前后,中午时分,透过放在阳台窗外支架上的鱼缸,在室内墙上观察到上、下2级纵向颜色顺序一致的艳丽彩虹.通过改变水深可观察到3级,甚至4级彩虹,并且总是最下面的彩虹最明亮,往上依次变暗.

为了找到多级彩虹形成的原因,采用底部铺有亚克力镜子的鱼缸作为主要观测装置,改变鱼缸底面倾角和水深等实验参量,结合计算机模拟分析了鱼缸中4级彩虹在水面出射的光路,并对其光谱特点进行了解析,获得了4级彩虹的等效光路图.

1 观察到多级彩虹现象的过程描述

观察到4级彩虹的场景参量如图1所示,房间长 4.5 m ,墙高 2.5 m .玻璃鱼缸($37.5\text{ cm} \times 26\text{ cm} \times 37.5\text{ cm}$)内盛有 $3\sim 5\text{ cm}$ 深的清水.

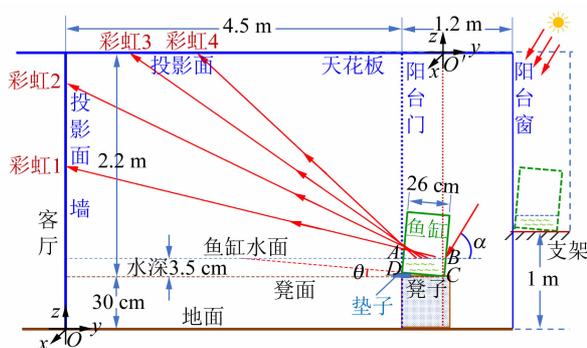


图1 房间、阳台、凳子、鱼缸和彩虹等相对位置示意图

2021年8月17日,天津地区的正午太阳高度角 $\alpha \approx 63^\circ$ ^[2].将鱼缸放在阳台窗外的支架上,鱼缸长边平行于阳台窗户,近似垂直于太阳入射光线,水深 4 cm ,水面宽度 26 cm ,鱼缸底面略微倾斜,在室内墙上可观察到2级彩虹[图2(a)].

8月25日,正午太阳高度角 $\alpha \approx 61^\circ$ ^[2].再次透过鱼缸观察到2级彩虹[图2(b)],且每级彩虹的纵向宽度更宽,几乎达到 1 m .

为增强鱼缸底面对水中太阳光的镜面反射,将买来的亚克力软镜子裁剪成合适尺寸(长约 36 cm ,宽约 24 cm),镜面朝上铺在鱼缸底部,此时可观察到3级彩虹[图2(c)].

8月26日,正午太阳高度角 $\alpha \approx 60^\circ$ ^[2].将鱼缸放置在阳台门旁边的凳子上(见图1).鱼缸长

收稿日期:2021-11-19;修改日期:2022-03-09

作者简介:刘新军(1980—),男,山西阳城人,天津大学理学院物理系副教授,博士,从事忆阻器神经元研究和大学物理教学. E-mail: xinjun.liu@tju.edu.cn

边平行于阳台窗户,近似垂直于太阳入射光线. 鱼缸离墙面的距离 $L \approx 4.5 \text{ m}$, 凳面距离室内地面的垂直高度 $d \approx 30 \text{ cm}$, 将鱼缸略向外倾斜, 可观察到 3 级彩虹[图 2(d)]. 减小鱼缸倾斜角, 仍能观察到 3 级彩虹[图 2(e)], 但位置略有下移. 用细管向外抽水, 降低水面高度, 直到露出亚克力镜子, 仍能观察到 3 级彩虹[图 2(f)].

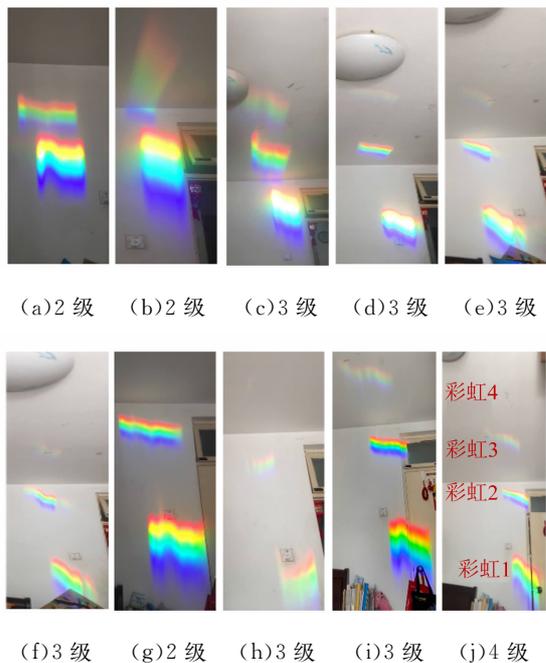


图 2 处暑前后观察到的多级彩虹

9 月 1 日, 正午太阳高度角 $\alpha \approx 59^\circ$ [2]. 鱼缸重新注入清水, 此次只观察到了 2 级彩虹[图 2(g)], 观察不到 3 级彩虹. 经仔细观察后, 发现水深约 5 cm, 而水面宽度仍是 26 cm, 猜想第 3 级彩虹的出射点可能超出水面宽度, 因此观察不到第 3 级彩虹.

为验证猜想, 将鱼缸在水平面(图 1 中 xoy 面)内旋转 90° , 即鱼缸窄边平行于阳台窗户. 此时水深不变, 而水面宽度增加到 37.5 cm, 调整鱼缸倾角, 再次观察到了 3 级横向略窄的彩虹[图 2(h)], 验证了水面宽度影响彩虹级数的猜想.

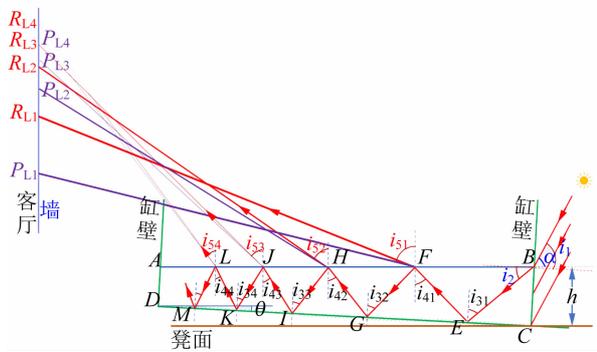
将鱼缸放回原来位置(即长边平行于阳台窗户), 调整鱼缸倾角, 再次观察到 2 级彩虹. 保持水面宽度不变, 用细管向外抽水减小水深, 可观察到 3 级彩虹[图 2(i)]; 继续抽水直到水深约为 3.5 cm 时, 可观察到 4 级彩虹[图 2(j)]. 但第 4 级彩虹颜色暗淡, 不易分辨. 该实验现象说明水深会影响彩虹的级数.

根据图 2 可知, 第 1 级彩虹出现在墙上中间位置, 纵向宽度约为 50 cm, 第 2 级彩虹明显变窄, 纵向宽度约为 25 cm, 其红光边缘接近天花板. 第 3 级和第 4 级彩虹在天花板上, 彩虹纵向宽度相对更窄.

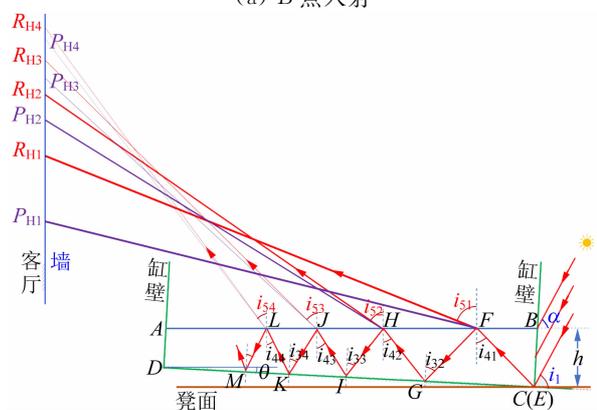
2 多级彩虹现象分析

由上文可知, 水面深度和宽度均会对彩虹级数有所影响. 然而, 多级彩虹到底来自哪里? 经过反复实验, 发现多级彩虹来源于鱼缸侧面入射的阳光, 即用手挡住侧水面, 4 级彩虹同时消失. 因此, 判断多级彩虹是由阳光在水面和镜面之间多次反射再多次从水面出射引起的.

图 3 绘制了太阳光从侧水面 BC 的 B 点和 C 点入射的红(紫)光多次从鱼缸水面 AB 出射的等效光路图. 由于整个侧水面 BC 都有入射太阳光线, 且每个点入射的阳光都在墙上形成不同级次的谱线[$R_{Lj}(P_{Lj}), R_{Hj}(P_{Hj})$ 分别表示红(紫)光在室内墙上最低和最高投影位置], 这些谱线相互叠加, 最后形成了多级彩虹. 下面的计算实例集中分析了 9 月 1 日观察到 4 级彩虹的情况.



(a) B 点入射



(b) C 点入射

图 3 阳光分别从 B 点和 C 点入射水中, 再多次从水面 AB 出射的等效光路图

2.1 侧水面 BC 入射红(紫)光的角度分析

9月1日实验中的太阳高度角 $\alpha \approx 59^\circ$, 鱼缸底面倾角 $\theta \approx 1.8^\circ$, 阳光从侧水面 BC 入射的入射角 $i_1 = \alpha + \theta \approx 60.8^\circ$.

2.1.1 红光分析

红光(760 nm)在水中的折射率 $n = 1.329^{[3]}$, 由折射定律可知^[4], BC 面上入射红光的折射角 $i_2 = 41.1^\circ$. 第1次镜面入射角 $i_{31} = 49.0^\circ$, 从水里入射到水面的入射角 $i_{41} = 47.2^\circ$, 红光在空气中的折射角, 即红光第1次出射角 $i_{51} = 77.0^\circ$. 根据几何关系, 得到这5个角的关系为:

$$\begin{cases} \sin i_2 = \frac{\sin i_1}{n}, \\ i_{31} = 90^\circ - i_2, \\ i_{41} = i_{31} - \theta, \\ \sin i_{51} = n \sin i_{41}. \end{cases} \quad (1)$$

红光第2次镜面入射角 $i_{32} = 45.4^\circ$, 比 i_{31} 小 $2\theta = 3.6^\circ$, 从水里入射到水面的入射角 $i_{42} = 43.6^\circ$, 比 i_{41} 小 2θ , 红光第2次出射角 $i_{52} = 66.3^\circ$, 和 i_{42} 之间符合折射定律. 同理, 红光第 j 次镜面入射角 i_{3j} 比 $i_{3(j-1)}$ 小 2θ , 从水里入射到水面的入射角 i_{4j} 比 $i_{4(j-1)}$ 小 2θ , 红光第 j 次出射角 i_{5j} 和 i_{4j} 之间符合折射定律, 即通式为:

$$\begin{cases} i_{3j} = i_{3(j-1)} - 2\theta, \\ i_{4j} = i_{4(j-1)} - 2\theta, \\ \sin i_{5j} = n \sin i_{4j}, \end{cases} \quad (2)$$

其中, j 为整数且 $j \geq 2$. 根据式(2)可计算得到 $i_{53} = 58.6^\circ$, $i_{54} = 52.0^\circ$.

2.1.2 紫光分析

紫光(400 nm)在水中的折射率 $n = 1.343^{[3]}$, BC 面上入射紫光的各个折射角、反射角和出射角等也符合式(1)和式(2). 入射角 $i_1 = 60.8^\circ$, 紫光折射角 $i_2 = 40.6^\circ$, 第1次镜面入射角 $i_{31} = 49.5^\circ$, 从水里入射到水面的入射角 $i_{41} = 47.7^\circ$, 紫光在空气中的折射角, 即紫光第1次出射角 $i_{51} = 83.1^\circ$, 根据式(2)可得 $i_{52} = 69.1^\circ$, $i_{53} = 60.6^\circ$, $i_{54} = 53.7^\circ$. 其中, $i_{31(\text{紫})} - i_{31(\text{红})} = 0.5^\circ$, 而 $i_{51(\text{紫})} - i_{51(\text{红})} = 6.1^\circ$, 根据文献[1]可知墙上第1级彩虹的纵向宽度 w 较大. 随着彩虹级数的增加, 水面上每级彩虹紫光的出射角 $i_{5j(\text{紫})}$ 与红光的出射角 $i_{5j(\text{红})}$ 的夹角在逐渐减小, 依次为 2.8° , 2.0° 和

1.7° , 对应墙上彩虹的纵向宽度 w 会随着级数的增加而减小.

2.2 红(紫)光从 B 点入射的光路分析

如图3(a)所示, 阳光从 B 点入射, 经镜面 E 点反射到达水面 F 点发生第1次反射和出射, 出射的红(紫)光投影到室内墙上的位置为 R_{L1} (P_{L1}), 该位置是第1级彩虹中红(紫)色的最低点. 同理, 第 j 次出射的红(紫)光投影到墙上的位置 R_{Lj} (P_{Lj}) 是第 j 级彩虹中红(紫)色的最低点, 其中 j 为整数且 $j \geq 1$.

2.2.1 j 级彩虹中红色最低点 R_{Lj} 的分析

图3(a)中从 C 点到水面 AB 的垂直距离为最大水深 $h = 3.5$ cm. 通过几何推导可知, 从 B 点入射的红光, 在水面第 j 次出射的位置与 B 点的距离为:

$$B_{Rj} = h \frac{\cos(i_{31} + \theta)}{\cos \theta} \cdot \sum_{m=1}^j \frac{\tan[i_{31} - (2m-3)\theta] + \tan[i_{31} - (2m-1)\theta]}{\cos[i_{31} - (2m-2)\theta]}, \quad (3)$$

其中, m 为整数且 $m \geq 1$. 根据式(3), 可计算得到 1~4 级红光出射所需的水面宽度 B_{Rj} , 如表1所示. 由于 $B_{Rj} < AB \approx 26.02$ cm, 则各级彩虹对应的红光均可以从水面 AB 出射.

假设墙与地面的交点为 O (见图1), 则墙上第 j 级彩虹中红色最低点 R_{Lj} 距离地面的高度为 $OR_{Lj} = d + h + [L + DC(1 - \cos \theta) +$

$$(h - DC \sin \theta) \tan \theta + \frac{DC}{\cos \theta} - B_{Rj}] \tan(90^\circ - i_{5j}), \quad (4)$$

其中, 放置鱼缸的凳子高度 $d = 30$ cm, 鱼缸离墙面的距离 $L = 450$ cm, 鱼缸底面宽度 $DC = 26$ cm. 利用式(4)可计算得到 OR_{Lj} , 如表1所示. 其中 OR_{L1} , OR_{L2} 均小于墙高 250 cm, 所以在墙上可观察到第 1, 2 级彩虹的最低点红色. 而 OR_{L3} 和 OR_{L4} 均大于墙高 250 cm, 故只能在天花板上观察到第 3, 4 级彩虹的红色.

2.2.2 j 级彩虹中紫色最低点 P_{Lj} 的分析

如图3(a)所示, 从 B 点入射的紫光对应的水面出射点也符合式(3), 计算可得紫光出射所需的水面宽度 B_{Pj} , 如表1所示.

表 1 阳光从 B 点或 C 点入射时,第 1~4 级彩虹中红(紫)光的水面出射位置和投影位置

j	B_{Rj}/cm	C_{Rj}/cm	OR_{Lj}/cm	OR_{Hj}/cm	B_{Pj}/cm	C_{Pj}/cm	OP_{Lj}/cm	OP_{Hj}/cm
1	7.77	3.89	142	143	7.91	3.96	90	91
2	14.16	10.52	236	238	14.41	10.70	210	212
3	19.47	16.03	313	315	19.80	16.30	290	292
4	23.90	20.63	387	390	24.29	20.97	366	368

经对比, $B_{Pj} > B_{Rj}$, 即每级紫光的出射点比红光略微偏左(图 1 中 y 轴负向), 且随着彩虹级数的增加, 紫光出射点 B_{Pj} 与红光出射点 B_{Rj} 之间的偏移量也略有增加. 例如, 第 1 级彩虹中紫光的出射点 B_{P1} 比红光 B_{R1} 偏左 0.14 cm, 而第 4 级彩虹中紫光的出射点 B_{P4} 比红光 B_{R4} 偏左 0.39 cm.

将式(4)中的 B_{Rj} 替换成 B_{Pj} , 即可求出 P_{Lj} 距离地面的高度 OP_{Lj} , 如表 1 所示. 其中, 当 $j=1, 2$ 时, $OP_{Lj} < OR_{Lj} < 250$ cm; 当 $j=3, 4$ 时, $OR_{Lj} > OP_{Lj} > 250$ cm. 说明第 1, 2 级彩虹的紫色最低点

P_{Lj} 在墙上, 且在红色最低点 R_{Lj} 之下(图 1 中 z 轴负向); 而第 3, 4 级彩虹的紫色在天花板上.

2.3 红(紫)光从 C 点入射的光路分析

如图 3(b)所示, 阳光从 C 点入射, 经多次反射、折射后发生色散, 出射后形成彩虹. 其中, 红(紫)光在第 j 次出射后投影到墙上的位置 R_{Hj} (P_{Hj}) 为第 j 级彩虹中红(紫)色的最高点.

2.3.1 j 级彩虹中红色最高点 R_{Hj} 的分析

通过几何推导可知, 从 C 点入射的红光在水面第 j 次出射的位置与水面 B 点的距离为:

$$C_{Rj} = \begin{cases} h[\tan \theta + \tan(i_{31} - \theta)], & j = 1; \\ h[\tan \theta + \tan(i_{31} - \theta)] + h \cos i_{31} \cdot \sum_{m=2}^j \frac{\tan[i_{31} - (2m-3)\theta] + \tan[i_{31} - (2m-1)\theta]}{\cos[i_{31} - (2m-2)\theta]}, & j > 1. \end{cases} \quad (5)$$

其中, $m \geq 2$ (m 为整数). 根据式(5), 可计算得到 1~4 级红光出射所需的水面宽度 C_{Rj} , 如表 1 所示. 经对比, $C_{Rj} < B_{Rj}$, 即如果 B 点入射的太阳光折射后经镜面反射的 j 级红(紫)光可以从水面出射, 则 C 点入射的太阳光折射后经镜面反射的相同 j 级红(紫)光一定也可以从水面出射.

另外, 将式(4)中的 B_{Rj} 替换成 C_{Rj} , 即可求出墙上 j ($j \geq 1$) 级彩虹中的红色最高点 R_{Hj} 到地面的距离 OR_{Hj} , 如表 1 所示. 其中, 当 $j=1, 2$ 时, $OR_{Hj} < 250$ cm; 当 $j=3, 4$ 时, $OR_{Hj} > 250$ cm. 说明第 1, 2 级彩虹的红色最高点可在墙上观察到, 第 3, 4 级彩虹的红色只能在天花板上观察到.

2.3.2 j 级彩虹中紫色最高点 P_{Hj} 的分析

如图 3(b)所示, 从 C 点入射的紫光经多次反射、折射后, 对应的出射点位置也符合式(5), 计算可得紫光出射所需的水面宽度 C_{Pj} , 如表 1 所示. 和 2.2.2 的分析相同, 各级彩虹中紫光的出射点比红光略微偏左, 即 $C_{Pj} > C_{Rj}$, 且随着彩虹级数的增加, 紫光出射点 C_{Pj} 与红光出射点 C_{Rj} 之间的偏移量也略有增加.

将式(4)中的 B_{Rj} 替换成 C_{Pj} , 即可求出 P_{Hj} 距

离地面的高度 OP_{Hj} , 如表 1 所示. 当 $j=1, 2$ 时, $OP_{Hj} < OR_{Hj} < 250$ cm; 当 $j=3, 4$ 时, $OR_{Hj} > OP_{Hj} > 250$ cm. 说明第 1, 2 级彩虹的紫色最高点 P_{Hj} 在墙上, 且在红色最高点 R_{Hj} 之下; 而第 3, 4 级彩虹的紫色在天花板上.

2.4 彩虹的特征分析

2.4.1 墙上彩虹的特征分析(上红下紫)

由表 1 可知, 第 1 级彩虹中红色和紫色的最高点与最低点的位置之差分别为: $OR_{H1} - OR_{L1} = 1$ cm, $OP_{H1} - OP_{L1} = 1$ cm. 由于侧水面 BC 上每点都有太阳光入射, 墙上 $R_{H1} \sim P_{L1}$ 范围内的颜色都是叠加而成的, 而且在 $R_{L1} \sim P_{H1}$ 范围内重叠更多, 但每处几乎都是单色光叠加 ($\Delta\lambda < 6.2$ nm), 因此第 1 级彩虹的纵向宽度 $w = OR_{H1} - OP_{L1} = 53$ cm, 颜色顺序上红下紫, 色彩明艳, 与图 2(j) 实验现象一致.

同理, 第 2 级彩虹中红色和紫色的最高点与最低点的位置之差分别为: $OR_{H2} - OR_{L2} = 2$ cm, $OP_{H2} - OP_{L2} = 2$ cm. 故第 2 级彩虹的纵向宽度 $w = OR_{H2} - OP_{L2} = 28$ cm ($\Delta\lambda < 22$ nm), 颜色顺序同样为上红下紫, 不过颜色不如第 1 级彩虹亮, 与

图 2(j)所示的实验现象一致. 此外,通过改变鱼缸底面倾角 θ 可以改变投影墙上彩虹的纵向宽度^[1]. 将 θ 角从 1.5° 增加到 2.0° ,可以观察到第 1 级彩虹的纵向宽度从 81 cm 减小到 30 cm,第 2 级彩虹的纵向宽度从 46 cm 减小到 27 cm,且墙上彩虹的红色上边缘位置均向上移动(图 1 中 z 轴正向).

2.4.2 天花板上彩虹的特征分析(左紫右红)

保持鱼缸底部位置 C 点不变,调节鱼缸底面倾角 θ . 由 C 点向天花板做垂线,其垂足 O' 定义为天花板上坐标原点的位置(见图 1),往左(y 轴负向)依次为房间和客厅,测量得到阳台门位置为 -26 cm,房间和客厅之间投影墙的位置为 -476 cm. 通过计算可得到 1~4 级彩虹中红色和紫色在天花板上的最左端位置($O'R_{Lj}, O'P_{Lj}$)和最右端位置($O'R_{Rj}, O'P_{Rj}$),如表 2 所示.

表 2 1~4 级彩虹中红(紫)光在天花板上的投影位置

j	$O'R_{Lj}/\text{cm}$	$O'R_{Rj}/\text{cm}$	$O'P_{Lj}/\text{cm}$	$O'P_{Rj}/\text{cm}$
1	-942	-938	-1 789	-1 785
2	-507	-503	-580	-576
3	-374	-370	-404	-401
4	-300	-297	-319	-315

因此,第 3 级彩虹的红色边缘和紫色边缘分别为 $|O'R_{L3} - O'R_{R3}| = 4$ cm, $|O'P_{L3} - O'P_{R3}| = 3$ cm,纵向宽度 $w = |O'P_{L3} - O'R_{R3}| = 34$ cm ($\Delta\lambda < 41$ nm),颜色顺序为左紫右红,比第 2 级彩虹暗,与图 2(j)实验现象一致.

同理,第 4 级彩虹的红色边缘和紫色边缘分别为 $|O'R_{L4} - O'R_{R4}| = 3$ cm, $|O'P_{L4} - O'P_{R4}| = 4$ cm,纵向宽度 $w = |O'P_{L4} - O'R_{R4}| = 22$ cm ($\Delta\lambda < 66$ nm),颜色顺序同样为左紫右红,比第 3 级彩虹暗,如图 2(j)所示. 通过改变鱼缸底面倾角 θ 可以改变第 3,4 级彩虹的纵向宽度 w . 例如,将 θ 角从 1.5° 增加到 2.0° 时,第 3,4 级彩虹的纵向宽度分别从 47 cm 和 29 cm 减小到 28 cm 和 18 cm.

3 拓展讨论

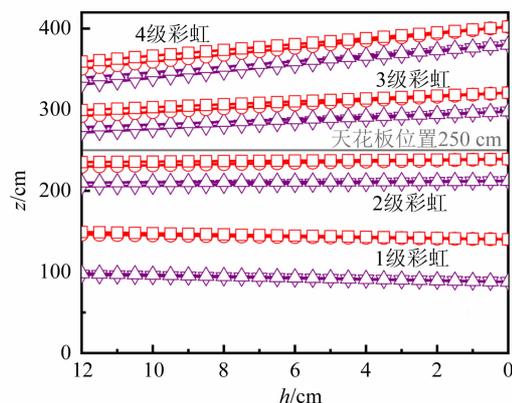
3.1 水深对墙上彩虹的投影位置、纵向宽度以及颜色亮度的影响

由 1 中多级彩虹的实验可知,出射彩虹的级

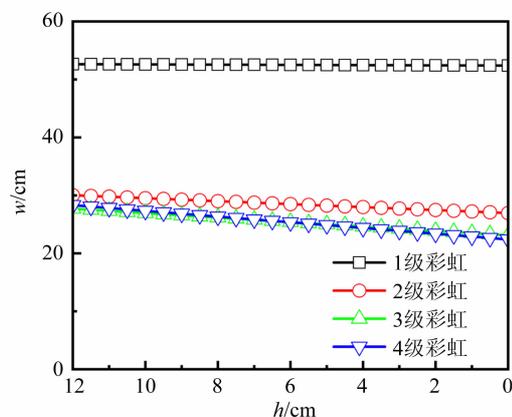
数会随着水深 h 的减小而增多. 图 4 给出了当太阳高度角 $\alpha = 59^\circ$,鱼缸底面倾角 $\theta = 1.8^\circ$,阳光从鱼缸侧水面 BC 入射时,各级彩虹在墙上的投影位置 z 和纵向宽度 w 随水深 h 的变化情况:

1) 当水深 h 从 12 cm 减小到 0.5 cm,第 1 级彩虹中红色上边缘的投影位置 z 从 149 cm 降低到 140 cm,纵向宽度从 53 cm ($\Delta\lambda < 22$ nm)减小到 52 cm ($\Delta\lambda < 0.89$ nm);而第 2 级彩虹中红色上边缘的投影位置 z 从 235 cm 升高到 239 cm,纵向宽度从 30 cm ($\Delta\lambda < 78$ nm)减小到 27 cm ($\Delta\lambda < 3.1$ nm).

2) 水深 h 每降低 1 cm 时,侧水面 BC 上入射阳光的垂直宽度 $h \cos i_1 / \cos \theta$ 约降低 0.49 cm. 当水深 h 分别为 12 cm 和 3.5 cm 时,入射阳光的垂直宽度分别为 5.9 cm 和 1.7 cm. 因此水深 h 较小时,从侧水面 BC 进入的阳光会减少,墙上的彩虹也会变暗,如图 2 所示.



(a) 投影位置 z 随最大水深 h 的变化



(b) 纵向宽度 w 随最大水深 h 的变化

图 4 不同级数彩虹中红光和紫光在墙上的投影位置 z 和彩虹纵向宽度 w 随最大水深 h 的变化

为了增加墙上彩虹的亮度,可以增加水深 h . 然而,当 h 增加时,光在水中走过的总路程也会增加(见图 3). 由于光在水中传播时,光强会有所衰减,墙上彩虹的亮度也会受到影响,因此在实验设计中须考虑该情况. 当 $\alpha=59^\circ, \theta=1.8^\circ$ 时, h 每增加 1 cm, B 点入射的红光在第一次出射水面前在水中走过的路程 $BE+EF$ 约增加 3.0 cm. 例如,当水深 $h=3.5$ cm 时, $BE+EF=10$ cm; 当水深 $h=12$ cm 时, $BE+EF=35$ cm. 而 C 点入射的红光在第一次出射水面前在水中走过的路程 EF 约增加 1.5 cm. 例如,当水深 $h=3.5$ cm 时, $EF=5.2$ cm; 当水深 $h=12$ cm 时, $EF=18$ cm.

3.2 水面宽度对出射彩虹级数的影响

由前面多级彩虹的实验可知,水面宽度对出

射彩虹级数也有影响. 由 2.3.1 的分析可知,如果侧水面 B 点入射的太阳光折射,再经镜面反射后从水面出射,则 C 点入射的太阳光一定也能从水面出射. 因此,关于水面宽度的分析,只需要分析 B 点入射的情况即可.

在不考虑侧水面 AD 有光线出射的情况下,表 3 给出了对应不同水深 h , 太阳光从侧水面 B 点入射时, 1~5 级红(紫)光出射所需要的水面出射宽度为 $B_{Rj}(B_{Pj})$. 若 $B_{Rj}(B_{Pj}) > AB$ (水面宽度), 则不能观察到对应 j 级彩虹的红(紫)色. 保持鱼缸位置不变, 当水深 $h > DC \sin \theta = 0.82$ cm 时, 水面宽度 ($AB = DC / \cos \theta = 26.02$ cm) 不变; 当水深 $h = 0.5$ cm 时, 水面宽度 $AB = (h / \tan \theta) + h \tan \theta = 15.93$ cm.

表 3 阳光从侧水面 B 点入射, 水深 h 不同时, 1~5 级彩虹中红(紫)光的出射位置 (不考虑光强的衰减)

h/cm	B_{R1}/cm	B_{R2}/cm	B_{R3}/cm	B_{R4}/cm	B_{R5}/cm	B_{P1}/cm	B_{P2}/cm	B_{P3}/cm	B_{P4}/cm	B_{P5}/cm
20.0	44.37	80.91	111.24	136.57	157.77	45.16	82.29	113.10	138.79	160.30
12.0	26.62	48.55	66.75	81.94	94.66	27.10	49.38	67.86	83.28	96.18
11.5	25.51	46.52	63.97	78.53	90.72	25.97	47.32	65.03	79.81	92.17
6.5	14.42	26.30	36.16	44.39	51.28	14.68	26.75	36.76	45.11	52.10
6.0	13.31	24.28	33.38	40.97	47.33	13.55	24.69	33.93	41.64	48.09
5.0	11.10	20.23	27.81	34.15	39.45	11.29	20.58	28.28	34.70	40.08
4.5	9.99	18.21	25.03	30.74	35.50	10.16	18.52	25.45	31.23	36.07
4.0	8.88	16.19	22.25	27.32	31.56	9.04	16.46	22.62	27.76	32.06
3.5	7.77	14.16	19.47	23.90	27.61	7.91	14.41	19.80	24.29	28.06
3.0	6.66	12.14	16.69	20.49	23.67	6.78	12.35	16.97	20.82	24.05
2.0	4.44	8.19	11.13	13.66	15.78	4.52	8.23	11.31	13.88	16.03
1.0	2.22	4.05	5.57	6.83	7.89	2.26	4.12	5.66	6.94	8.02
0.5	1.11	2.03	2.79	3.42	3.95	1.13	2.06	2.83	3.47	4.01

注:表中蓝色数字表示红(紫)光出射所需要的水面宽度 $B_{Rj}(B_{Pj})$ 大于水面宽度 AB , 光线不能出射.

由表 3 可知,当 $h > 12.0$ cm 时, $B_{R1} > AB$, 不能观察到彩虹. 当 $h = 6.5 \sim 11.5$ cm 时, 可以观察到 1 级彩虹; 当 $h = 5.0 \sim 6.0$ cm 时, 可以观察到 2 级彩虹; 当 $h = 4.0 \sim 4.5$ cm 时, 可以观察到 3 级彩虹; 当 $h = 3.5$ cm 时, 可以观察到 4 级彩虹; 当 $h \leq 3.0$ cm 时, 理论上可以观察到 5 级甚至更高级数的彩虹. 然而水深降低后, 侧水面 BC 进入的阳光减少, 经反射折射后, 出射光的能量更少. 在实验过程中, 直到鱼缸里的水被抽干也没有观察到第 5 级彩虹. 由于本实验没有在暗室中进行, 背景光较强, 因此对第 5 级彩虹的观察影响较大.

3.3 全反射引起的缺级现象

当红(紫)光在水面的入射角 i_{4j} 大于红(紫)光的全反射角 $48.8^\circ(48.1^\circ)$ 时, 红(紫)光不能出射到空气中, 即红(紫)光在出射点发生全反射^[5]. 如果同样级数的红光和紫光都达到全反射的条件, 那么相应级数的彩虹就会缺失, 即全反射会引起彩虹的缺级现象. 随着入射角 $i_1 = \alpha + \theta$ 的减小, 即减小鱼缸底面倾角 θ 或太阳高度角 α , 小级数的彩虹会由于全反射而不能出现, 即第 1, 2, 3, 4 级彩虹会依次消失.

对于侧水面 BC 上同一点入射的红光和紫光来说, 总是紫光先发生全反射, 因此随着入射角

$i_1 = \alpha + \theta$ 的减小, 会观察到彩虹由紫色到红色逐渐消失的现象. 此时的部分彩虹总是贴着水面出射, 在高于水面高度的墙上位置有颜色变化, 甚至可能只观察到红色.

图 5 给出了太阳高度角 $\alpha = 50^\circ$, 鱼缸底面倾角 $\theta = 3.0^\circ$ 时, 第 1 级彩虹缺失的光路图. 图中红光第 1 次水面入射角 $i_{41} = 50.2^\circ > 48.8^\circ$, 紫光

$i_{41} = 50.5^\circ > 48.1^\circ$, 故第 1 级彩虹全部缺失. 而红光第 2 次水面入射角 $i_{42} = 44.2^\circ < 48.8^\circ$, 紫光 $i_{42} = 44.5^\circ < 48.1^\circ$, 所以第 2 级彩虹出现, 同理第 3, 4, 5 级彩虹也能出现. 图 5 中没有考虑第 6 级甚至更高级彩虹的情况, 这是由于光在水中传播过程中强度会发生衰减, 具体呈现出哪些彩虹, 需要通过具体的实验来验证.

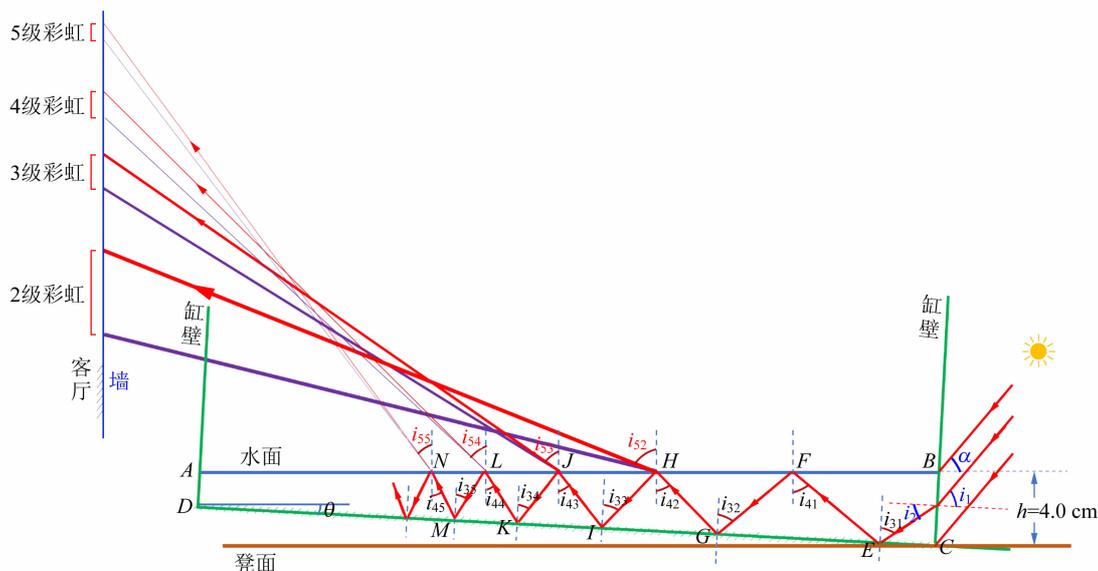


图 5 全反射引起 1 级彩虹缺失的光路图

4 结束语

本文从墙上和天花板上观察到的 4 级彩虹现象入手, 重点利用几何光学研究了阳光透过矩形玻璃鱼缸侧水面入射并在镜面和水面多次反射引起的多级彩虹现象的光路, 分析了各级彩虹的光谱特点以及彩虹级数与太阳高度角、鱼缸底面倾角、水深以及水面宽度之间的关系, 同时利用计算机模拟再现了多级彩虹现象, 说明了全反射引起的缺级现象以及彩虹部分颜色缺失(先从紫色开始缺失)的现象. 对多级彩虹现象的观察再次验证了用矩形玻璃鱼缸演示彩虹实验具有趣味性、易操作性和多样性, 只要改变太阳光(强度、高度角和方位角)、侧水面入射角、鱼缸底面(反射能力、倾斜角)、水深、水面宽度、彩虹投影面(距离、

形状和倾角)以及背景光等, 就能获得不同效果的彩虹, 非常有利于在教学和科普中应用和拓展.

参考文献:

- [1] 刘新军. 阳光透过鱼缸在室内墙上投射出米级亮丽彩虹[J]. 物理实验, 2022, 42(5): 23-29, 47.
- [2] 王国安, 米鸿涛, 邓天宏, 等. 太阳高度角和日出日落时刻太阳方位角一年变化范围的计算[J]. 气象与环境科学, 2007, 30(S1): 161-164.
- [3] 姜良广, 孙鹏. 水的折射率与波长间函数关系的模型[J]. 光谱实验室, 2002, 19(4): 554-556.
- [4] 王永祥, 耿志刚. 大学物理实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016: 203-214.
- [5] 吴亚非. 大学物理(下册)[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2018: 84-85.

(下转 25 页)

Measuring grating constant based on Talbot effect

LI Dong-zhi¹, LIU Zhong-ju², WU Hao-jia², LIANG Lu-ye², LI Bo-chen², ZHAO Qian²

(1. School of Advanced Manufacturing, Guangdong University of Technology, Jieyang 522000, China;

2. School of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870, China)

Abstract: Taking advantage of the periodicity of Talbot effect grating self-imaging, with the help of LabVIEW to realize automatic collection and real-time data analysis, basic optical and electromechanical components were used to accurately measure the grating constants of one-dimensional gratings. The real-time contrast curve was obtained by the change of the overall contrast of the image during the movement of the detector. And the Talbot distance was obtained by obtaining the average spacing of periodic images through multiple adjacent maximum peak positions, thereby calculating the grating constant. The experiment had the characteristics of simple device and operation, high precision, high degree of automation and image visualization.

Key words: Talbot effect; grating constant; self-imaging; contrast

[责任编辑:郭 伟]

(上接 20 页)

Optical path analysis of four-order rainbows by the sunlight through the fish tank

LIU Xin-jun

(Department of Physics, School of Science, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

Abstract: The equivalent optical path diagram of the four-order rainbows phenomena on the indoor wall and ceiling by sunlight passing through a rectangular glass fish tank was studied by using the geometric optics method. The relationship between the orders of rainbow and the solar altitude angle, the inclination angle of the bottom of the fish tank, the water depth and the water surface width was analyzed. In addition, the missing orders caused by total reflection and the missing color of the rainbow (starting from purple) were also explained.

Key words: rainbow; geometrical optics; dispersion; prism; missing orders

[责任编辑:郭 伟]