

文章编号:1005-4642(2023)11-0041-03

## 麦克斯韦滚摆的力学过程分析

李铁平, 万 森, 金三梅, 景锐平

(中国地质大学(武汉) 数学与物理学院, 湖北 武汉 430074)

**摘 要:**分析了麦克斯韦滚摆在下降过程中的势能、平动动能与转动动能的相互转化, 总机械能保持守恒; 进一步分析了麦克斯韦滚摆运动到最低点的力学过程, 麦克斯韦滚摆质心速度反向的原因, 并给出了悬线最大张力的近似公式。

**关键词:**麦克斯韦滚摆; 机械能守恒; 动能; 势能

**中图分类号:** O313.3

**文献标识码:** A

**DOI:**10.19655/j.cnki.1005-4642.2023.11.006

麦克斯韦滚摆如图 1 所示, 当转动滚摆的轴, 使滚摆上升到顶点时, 滚摆储蓄一定的势能. 当滚摆被松开, 开始旋转下降, 滚摆势能逐渐减小, 动能(平动动能和转动动能)逐渐增加. 当悬线完全松开, 滚摆不再下降时, 转动角速度与下降平动速度达到最大值, 动能最大. 由于滚摆仍继续旋转, 它又开始缠绕悬线使滚摆上升. 在滚摆上升的过程中动能逐渐减小, 势能逐渐增加, 上升到原来高度时, 动能为零, 势能最大. 如果忽略能量损耗, 滚摆每次上升的高度都相同, 说明滚摆的势能和动能在相互转化过程中, 机械能的总量保持不变<sup>[1-3]</sup>. 玩具溜溜球<sup>[4-5]</sup>就是麦克斯韦滚摆的普及版.



图 1 麦克斯韦滚摆

### 1 下降过程的力学分析

重力作用下滚摆的运动是滚摆质心的平动与滚摆绕质心转动的合运动. 如果不计空气阻力, 滚摆在运动过程中机械能守恒. 在任意时刻, 滚摆的总动能  $E$  等于质心的平动动能和绕质心转动的动能之和, 即

$$E = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2, \quad (1)$$

式中,  $J$  是滚摆对质心轴的转动惯量.

滚摆的受力情况如图 2 所示, 图中  $r$  是轴的半径,  $T$  是绳对滚摆的拉力,  $mg$  是滚摆受到的重力, 由质心运动定理和转动定律可得<sup>[6-7]</sup>

$$\begin{cases} mg - T = ma_c, \\ Tr = J\beta, \\ \beta r = a_c, \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $a_c$  为质心的加速度,  $\beta$  为绕质心转动的角加速度. 由此可解出

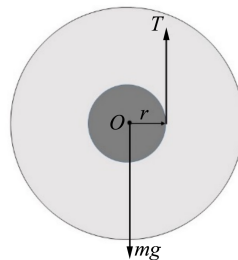


图 2 麦克斯韦滚摆的受力分析

“第 16 届高等学校物理演示实验教学研讨会”会议论文

收稿日期: 2023-07-01

基金项目: 教育部协同育人项目(No. 220603584244023)

作者简介: 李铁平(1966—), 男, 湖北武汉人, 中国地质大学(武汉)数学与物理学院副教授, 学士, 从事物理实验与演示实验教学. E-mail: cug0010@qq.com

$$\begin{cases} a_c = \frac{mgr^2}{mr^2 + J}, \\ T = \frac{mgJ}{mr^2 + J}, \\ \beta = \frac{mgr}{mr^2 + J}. \end{cases} \quad (3)$$

若滚摆从静止开始下降,经过时间  $t$ ,其下降的高度为

$$h = \frac{mgr^2 t^2}{2(mr^2 + J)}, \quad (4)$$

质心的平动动能为

$$E_{kt} = \frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{m^3 g^2 r^4 t^2}{2(mr^2 + J)^2}, \quad (5)$$

绕质心的转动动能为

$$E_{kv} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{m^2 g^2 r^2 t^2 J}{2(mr^2 + J)^2}, \quad (6)$$

显然满足

$$E_{kt} + E_{kv} = mgh. \quad (7)$$

式(7)表明,滚摆在下降过程中,减少的重力势能转化为质心的平动动能与绕质心的转动动能之和,即滚摆在运动中机械能守恒.

由于转轴的半径  $r$  远小于摆轮的半径  $R$ ,且摆轮的质量主要分布于摆轮的边缘,所以有  $J \gg mr^2$ ,从而有  $E_{kt} \ll E_{kv}$ ,即滚摆质心的平动动能很

小,而滚摆质心速度与摆轮边缘转动线速度的比值为

$$\frac{a_c}{\beta R} = \frac{r}{R}, \quad (8)$$

所以视觉上的感受是转轴平移很慢,而摆轮转得很快.

当滚摆下降到最低点时,摆轮的转动动能达到最大值,由于转动的惯性,滚摆开始反向缠绕悬线,下落过程中获取的平动动能和转动动能将重新转化为重力势能,轮的转速逐渐减小,质心位置升高,重力势能增大.即到达最低点后,滚摆的动能转换为重力势能,直至到达最高位置.然后滚摆在重力作用下再次下降,如此反复……

## 2 回转点的力学分析

若要优化麦克斯韦滚摆结构,可减少平动动能在动能里面的占比,让势能尽可能多地变成转动动能.

滚摆下落到最低点时,质心速度反向是否会损失部分能量?如图3所示,质心速度的反转不是“瞬时”完成,而是经历向下的质心速度,改变成水平速度,再转化向上的速度,其中能量依然保持守恒.

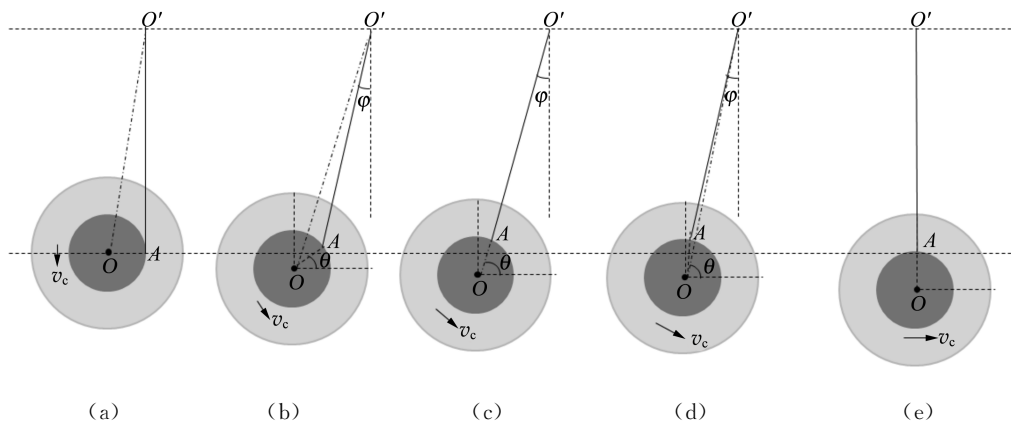


图 3 滚摆在最低点的运动特征

分析质心速度的改变过程,必然需要考虑质心速度水平方向改变的动力来源.

图3中的(a)~(e)为滚摆在最低点的运动过程.在该过程中,系统的质心位置下降,重力势能减小,动能增加.其中,图3(a)是滚摆质心达到悬线末端时的状态图,滚摆在下落接近最低点时,滚轮悬挂点  $A$  离开铅直位置,悬线略有倾斜,由于

摆绳在内轮的切线方向,故切点  $A$  的速度可表示为  $v_A = v_c - \omega r$ .刚开始点  $A$  在  $OO'$  连线右下方,如图3(b)所示,此时拉力矩方向与滚轮角加速度  $\beta$  方向相同,转动加速.由于滚轮受到的合力导致滚轮做回复到铅直位置的运动,因此质心水平方向的速度增加,竖直方向速度减小,即  $v_c$  方向偏离

铅直位置. 随着滚轮的转动, 某一时刻点  $A$  会落在  $OO'$  的连线上, 如图 3(c) 所示, 此时系统所受的拉力矩减小到 0, 转速达到最大. 滚轮继续运动, 某一时刻点  $A$  会落在  $OO'$  的连线左上方, 如图 3(d) 所示, 此时拉力矩方向与滚轮角加速度  $\beta$  方向相反, 转动动能减小, 平动动能增加, 即转动减速, 平动加速. 由于点  $A$  受到向右的分力作用, 直到点  $A$  回复到铅直位置, 如图 3(e) 所示, 此时小球中心  $O$  到达最低点, 滚轮回复到铅直位置, 质心速度变为水平速度.

悬线拉力将原先质心向下的速度改变方向, 直到最低点速度为水平方向, 其平动动能和转动动能到达最大值, 理论上没有发生能量的损耗; 如果忽略悬线的微小偏移, 无法理解质心平移速度的反转.

其后发生的上升过程与降落过程正好相反, 就不再讨论了.

通过力学模拟与简化分析, 可以得到悬绳最大拉力

$$T_{\max} = mg + \frac{mr^2}{J+mr^2} 2mg \left(1 + \frac{h}{r}\right), \quad (9)$$

代入实际麦克斯韦滚摆的参考值,  $J = 20mr^2$ ,  $h = 1 \text{ m}$ ,  $r = 0.5 \text{ cm}$ , 得到  $T_{\max} \approx 20mg$ . 最大拉力确实远远大于滚摆的重力  $mg$ , 所以很多研究者略去力学过程的分析, 只是简单的把最低点的回转过程理解为冲击模式.

在滚摆整个运动过程中, 滚摆在理论上是能回复到释放点的. 但本文的模型是基于忽略空气阻力、轻质弹性细线, 也没有考虑转轴系绳点在技

术上会发生移动摩擦. 通过适当处理, 系绳点的移动可能减少到极值; 但空气阻力无法克服, 会导致部分能量损耗, 还有非绝对刚性的细绳也会导致部分能量损耗; 另外细绳质量也会导致一定的能量消耗.

### 3 结束语

滚摆物理装置具备极高的保守能量转化率, 对其运动转向的分析大多采用“冲击”模式, 夸大了绳索非弹性形变带来的能量损失. 实际生活中, 通过对滚摆适当改进就可让其 32 次的上下往返.

### 参考文献:

- [1] 张金玉, 蒲泽源, 唐元广, 等. 滚动法转动惯量测量仪[J]. 大学物理实验, 2020, 33(2): 29-32.
- [2] 陈坤波, 朱瑜, 郑伟, 等. 测量三线摆上下悬盘间垂直距离的改进方案[J]. 大学物理实验, 2019, 32(3): 25-29.
- [3] 姬洪伟, 包敏, 吴鹏, 等. 一种角动量守恒演示仪的设计[J]. 大学物理实验, 2020, 33(3): 72-74.
- [4] 周雨青, 刘甦. 机械能守恒演示中一个值得商榷的案例——“悠悠球”系统能量损失分析[J]. 大学物理, 2011, 30(8): 18-21.
- [5] 储若超; 张锐波. 麦克斯韦滚摆运动规律的理论研究[J]. 物理通报, 2017(11): 115-117.
- [6] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986: 194-204.
- [7] 顾建中. 力学教程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980: 113-124.

## Mechanical analysis of the Maxwell roll pendulum

LI Tieping, WAN Miao, JIN Sanmei, JING Ruiping

(School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan 430074, China)

**Abstract:** The mutually transfer among the potential energy, translational kinetic energy and rotational kinetic energy in the falling movement process of Maxwell roll pendulum was analyzed, while the total mechanical energy was conserved. The mechanical process of Maxwell rolling pendulum moving to its lowest point was analyzed, the reason for the reverse of the mass center velocity of the Maxwell rolling pendulum was explained. And the approximate formula for the maximum tension of the suspension line was provided.

**Key words:** Maxwell roll pendulum; conservation of mechanical energy; kinetic energy; potential energy

[编辑: 郭伟]