

文章编号:1005-4642(2023)03-0043-07

用电路噪声测量玻尔兹曼常量和电子电荷

宋冰睿^{a,b}, 张立帆^{a,b}, 齐潇骏^{a,b}, 刘佳睿^a, 张翀玮^a, 王中平^c, 张增明^c

(中国科学技术大学 a. 少年班学院; b. 严济慈物理科技英才班;

c. 物理学院 物理实验教学中心, 安徽 合肥 230026)

摘 要:设计并搭建热噪声和散粒噪声测试电路系统, 利用锁相放大器, 从极强的背景噪声中提取微弱待测电信号, 输入参考信号实现频谱搬移测量法, 测定了玻尔兹曼常量 k 和电子电荷 e . 该实验能够加深学生对电路噪声特性的理解, 掌握锁相放大器技术和微弱信号测量方法.

关键词:玻尔兹曼常量; 电子电荷; 频谱搬移测量法; 热噪声; 散粒噪声; 锁相放大器; 参考信号

中图分类号: TM131

文献标识码: A

DOI: 10.19655/j.cnki.1005-4642.2023.03.006

在物理学的发展中, 物理理论和基本定律常与基本物理常量的发现或者测量有着密切的联系. 例如, 在经典物理中, 万有引力常量是理论物理和天体物理等领域最重要的基本物理常量^[1]; 包含玻尔兹曼常量 k 的能量均分定理, 说明分子热运动能量按自由度平均分配^[2]. 而在微观世界的探索中, 基本物理常量仍不可或缺. 例如, 密立根油滴实验证明了电荷的量子性, 测定了元电荷电量 e ^[3]; 普朗克的量子化假设标志量子理论的诞生, 提出了普朗克常量 h ; 爱因斯坦相对论的出现, 也伴随着重要的基本物理常量——真空光速 c . 可见, 基本物理常量的发现与测定在物理学中十分重要.

电路内部噪声是随机过程, 几乎出现在物理实验的所有测量中. 在物理实验教学中, 开设电路噪声实验, 引导学生加深对电路噪声基本特性的理解及其影响的认识, 掌握微弱信号的测量方法, 对于学生获取目的信号尤为重要. 国外高校的教学团队为此进行了积极探究. 例如, R. Kit-tel 等人设计了通过噪声温度计测量玻尔兹曼常量 k 的本科生物理实验^[4]; D. R. Spiegel 和 R. J. Helmer 鉴于统计涨落在物理学中的意义, 为使 学生获得对常见统计涨落现象的实践经验, 设计了基于指示灯照射光电二极管产生电流的散粒

噪声实验^[5]; 美国麻省理工学院(MIT)物理系教学团队设计了电阻热噪声和光电二极管散粒噪声实验^[6]. 国内高校也开展了这方面的物理实验教学研究. 例如, 浙江大学物理系的教学团队在验证热噪声与闪烁噪声的主要特征和分析散粒噪声的信噪比方面完成了相关工作^[7], 但并未在测量基本物理常量方面进行研究.

本文设计并搭建了电路热噪声和散粒噪声测试系统, 基于锁相放大器, 将微弱待测电信号从强烈的背景噪声中提取、放大并测量^[8-9], 测量了电路的热噪声和散粒噪声. 另外, 根据 Nyquist-Shannon 采样定理分析实验现象, 为排除低频信号的干扰, 通过输入参考信号, 实现频谱搬移测量方法, 测定了玻尔兹曼常量 k 和电子电荷 e .

1 实验原理

1.1 热噪声的基本原理

热噪声是由于导体或半导体中的载流子(电子和空穴)无规则的热运动所引起的涨落现象, 具有随机和无法消除的特性. 只要温度高于绝对零度, 就存在热噪声; 温度越高, 热噪声越明显. 因此, 常温下热噪声存在于各种电子器件和传输介质中. 热噪声通常具有很宽且连续的频谱, 与白光的光谱成分类似, 属于白噪声. 1928 年, J. B.

收稿日期: 2022-04-21; **修改日期:** 2022-11-21

作者简介: 宋冰睿(2002—), 男, 湖北武汉人, 中国科学技术大学少年班学院 2019 级本科生. E-mail: songbr@mail.ustc.edu.cn

通信作者: 王中平(1976—), 男, 山东临沂人, 中国科学技术大学物理实验教学中心副教授, 博士, 研究方向为凝聚态物理. E-mail: zpwang@ustc.edu.cn

Johnson 在首次实验上发现了热噪声^[10], 随后 Nyquist 应用统计力学理论, 得到了其功率谱密度函数. 热噪声的均方差电压为

$$d\langle V^2 \rangle = 4R_f k T df, \quad (1)$$

其中, $R_f = \frac{R}{1 + (2\pi f CR)^2}$ 为等效电阻, T 为电阻所处的绝对温度, k 为玻尔兹曼常量, df 为待测噪声的带宽(Hz), $d\langle V^2 \rangle$ 是 df 频段内的电压平方均值. 热噪声的功率谱密度为

$$S = \frac{d\langle V^2 \rangle}{df} = 4R_f k T. \quad (2)$$

可见, 实验上测量热噪声的功率谱密度, 即可获得玻尔兹曼常量 k .

1.2 散粒噪声的基本原理

散粒噪声是由于半导体中载流子产生、复合的涨落, 使越过 PN 结势垒的载流子数目发生起伏所引起的, 因此半导体器件都具有固有的散粒噪声. 在电子管中, 相同时间间隔内从阴极发射的电子数是随机的, 因而将引发阳极电流的涨落. 早在 1918 年, Schottky 就发现了电子管阴极发射电子数目的无规则起伏现象. 散粒噪声的频谱与热噪声类似, 在很宽的频段内不随频率变化, 可视为白噪声. 散粒噪声的均方差电流为

$$d\langle I^2 \rangle = 2e\langle I \rangle df, \quad (3)$$

其中, $\langle I \rangle$ 为采样时间内通过电路回路的平均电流, e 为电子电荷, 而 $d\langle I^2 \rangle$ 为 df 频段内的电流方均值, 在实验设计中常常将电流信号转换为 $d\langle V^2 \rangle$ 电压信号进行测量.

利用统计力学中的坎贝尔定理, 可以导出单位频段内的电压涨落, 也即散粒噪声的功率谱密度为

$$S = \frac{d\langle V^2 \rangle}{df} = \frac{R^2 d\langle I^2 \rangle}{df} = 2eR^2 \langle I \rangle. \quad (4)$$

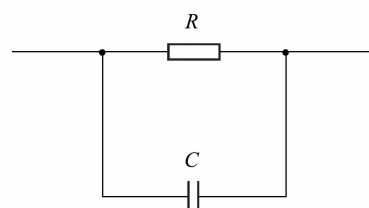
可见, 实验上通过测量散粒噪声的功率谱密度, 即可获得电子电荷 e .

2 频谱搬移测量方法

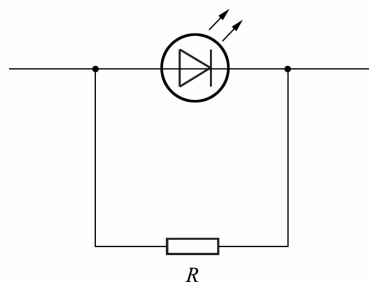
产生热噪声和散粒噪声的基本电路如图 1 所示, 将所示的基本电路分别连接至测试电路, 即可获取相应的电压信号 $U(t)$. 因该信号十分微弱, 故首先应将 $U(t)$ 输入前置放大器进行放大得到 $V(t)$ (前置放大器的增益参量可设置且已知), 再将 $V(t)$ 输入高精度数字源表采集数据, 此思路在

理论上可行.

实验中, 低频信号往往掺杂 $1/f$ 噪声和 50 Hz 市电频率噪声等干扰. 一方面, $1/f$ 噪声 (又称为闪烁噪声或 Flicker noise) 在极低频段尤为显著, 其主要由半导体的表面缺陷、接触电阻和电阻类型等涨落产生; 而对于 50 Hz 市电频率噪声, 即使利用锁相放大器中内置的 50 Hz 工频陷波器也无法完全屏蔽. 这 2 种噪声不可避免地存在, 很难对其进行直接消除.



(a) 热噪声电路



(b) 散粒噪声电路

图 1 产生 2 种噪声的基本电路

另一方面, 实验中使用的高精度数字源表存在一些固有缺陷——采样频率过低, 最高仅为 100 Hz. 若用文献[5]的测试电路直接将其用于高频信号的测量, 不可避免地会违背 Nyquist-Shannon 采样定理 (以下简称 N-S 定理)^[11]. N-S 定理指出, 在对连续信号进行离散采样, 特别是在对模拟信号进行 A/D 转换过程中, 当采样频率 ω_s 和信号中最高频率 ω_M 间满足关系 $\omega_s > 2\omega_M$ 时, 采样的数字信号可完整保留原始信号中的信息, 反之则可能产生信号失真, 如图 2 所示. 根据采样函数的性质, 可将采样信号的频谱拓宽, 当 $\omega_s > 2\omega_M$ 时, 不同频率的信号谱不会发生混叠; 当 $\omega_s < 2\omega_M$ 时, 不同频率的信号谱发生混叠, 即产生信号失真.

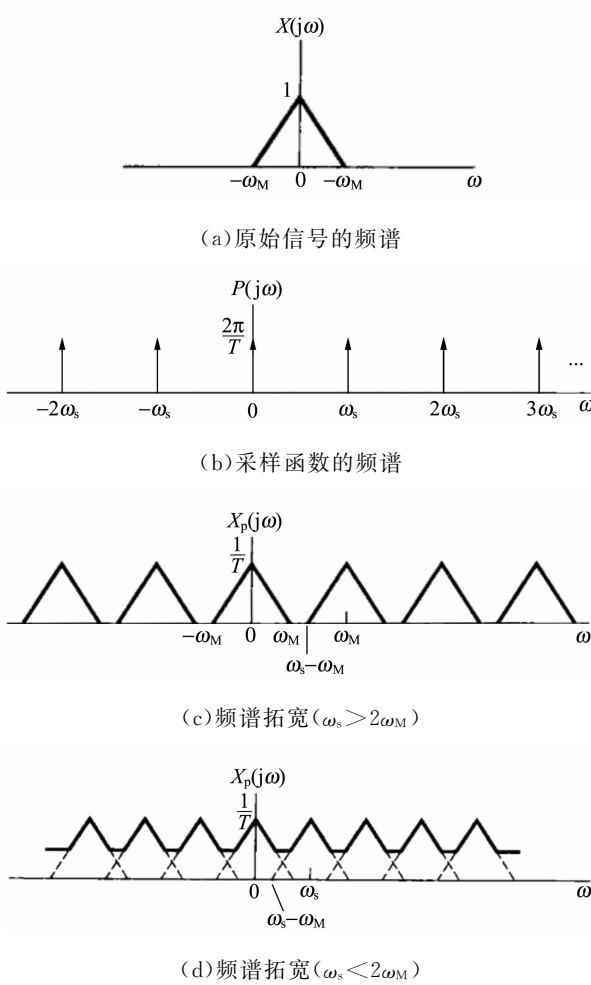


图2 N-S定理的直观示意图

为解决采样频率和目的信号频段两者不匹配的问题,根据 N-S 定理,设计了频谱搬移测量方法.该方法基于调制、解调的思想,在前置放大器和数字源表中间接入锁相放大器模块,并在该模块输入三角函数波参考信号源

$$S_R(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \delta), \quad (5)$$

其中, A_0 为幅值, ω_0 为角频率, δ 为初相位.若设经过前置放大器(零频增益设为 G)放大后的信号为 $V(t)$,根据设定的数字源表单次采样总时间 T_{tot} ,可以对其进行傅里叶级数展开,即采用离散谱近似:

$$V(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (6)$$

其中, $\omega_i = \frac{2\pi i}{T_{\text{tot}}}$ 是基频的整数倍, A_i 和 φ_i 是角频率为 ω_i 信号分量的幅值与相位.通过锁相放大器内置的前端乘法器,求得 $V(t)$ 和参考信号 $S_R(t)$ 的乘积

$$B = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i A_r \sin(\omega_i t + \varphi_i) \sin(\omega_0 t + \delta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2} A_i A_r \{ \cos[|\omega_i - \omega_0|t + \varphi_i - \delta] - \cos[(\omega_i + \omega_0)t + \varphi_i + \delta] \}, \quad (7)$$

其中, $A_r = \frac{A_0}{V_0}$ 为无量纲量, V_0 为由锁相放大器内置的电压参量.设有关于 ω_0 对称的频段 $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$, 则 $[\omega_1, \omega_2]$ 频段的带宽为 $2\Delta\omega$.选取的频段半宽 $\Delta\omega$ 和采样时间 T_{tot} 满足

$$\omega_0 \gg \Delta\omega \gg \frac{2\pi}{T_{\text{tot}}}, \quad (8)$$

考虑频段 $[\omega_1, \omega_2]$ 内频率为 ω_i 的信号经过锁相放大器内置的后端四阶 RC 级联低通滤波器(其系统函数为 $g(\omega) = \frac{1}{[1 + (\omega\tau)^2]^2}$, 并通过后台设置参量使得时间常量 $\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$), 式(7)中的和频分量

$\omega_i + \omega_0$ 被完全滤掉,只留下差频分量 $\delta_i\omega = |\omega_i - \omega_0| (< \Delta\omega)$.如图3所示,有2种频率 $\omega_0 \pm \delta_i\omega$ (分别记为 ω_{1i} 和 ω_{2i} , 其幅值记为 A_{1i} 和 A_{2i}) 的信号在频谱中被平移到 $\delta_i\omega$, 因此数字源表采得的频率为 $\delta_i\omega$ 的信号为

$$D(\delta_i\omega) = A_{1i} \cos(\delta_i\omega t + \phi_{1i}) + A_{2i} \cos(\delta_i\omega t + \phi_{2i}). \quad (9)$$

若实验上进行多次采样,并设噪声的频谱保持大致不变(即对于每次采样,频率为 ω_{1i} 和 ω_{2i} 分量的幅值均为 A_{1i} 和 A_{2i}), 且保持数字源表每次的采样时间 T_{tot} 相同(即傅里叶展开的基频 $\frac{2\pi}{T_{\text{tot}}}$ 相同), 则式(9)对采样次数的平方平均值为

$$\begin{aligned} \langle D^2(\delta_i\omega) \rangle &= \frac{1}{2} (A_{1i}^2 + A_{2i}^2) + \\ &2A_{1i}A_{2i} \langle \cos(\delta_i\omega t + \phi_{1i}) \cos(\delta_i\omega t + \phi_{2i}) \rangle = \\ &\frac{1}{2} (A_{1i}^2 + A_{2i}^2). \end{aligned} \quad (10)$$

由于低通滤波器系统函数在 $\omega = 0$ 附近的带宽内变化十分缓慢,因此对于频率为 $\delta_i\omega$ 的信号,其幅值 A_{1i} 和 A_{2i} 的放大倍数均可统一视为测试系统的零频增益常量,则上式记为

$$\langle D^2(\delta_i\omega) \rangle = A_{1i}^2 = A_{2i}^2 = A^2(\delta_i\omega). \quad (11)$$

再考虑到 A^2 中含有前置放大器增益 G 、锁相放大器内置电压参量 A_r 和低通滤波器增益等因子,可得频率为 ω_i 的功率谱为

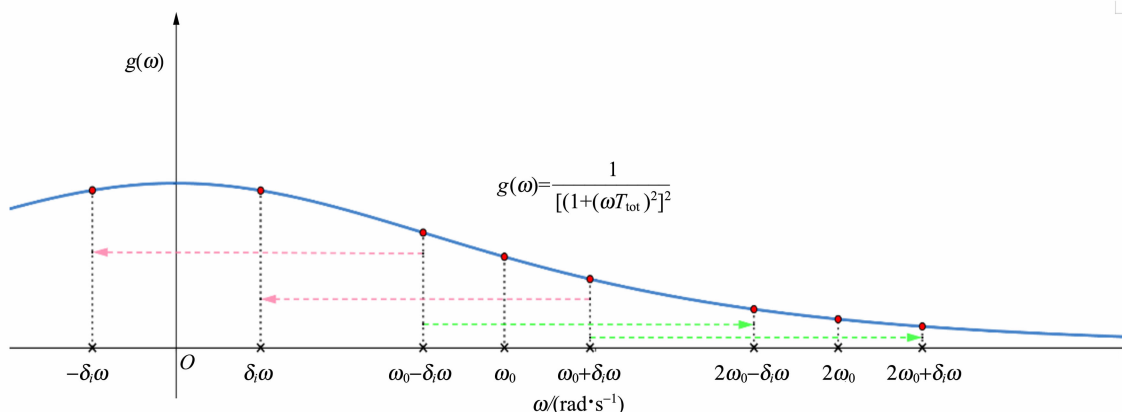


图 3 频谱搬移原理示意

$$W(\omega_i) = \frac{A^2(\delta_i\omega)}{g^2 \frac{\delta_i\omega}{2\pi} \left(\frac{1}{2}A_r\right)^2 G^2}. \quad (12)$$

经过傅里叶展开,在 $[\omega_1, \omega_2]$ 频段有 $N = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi/T_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{tot}}\Delta\omega}{\pi}$ 个频率. 根据式(8), $N \gg 1$, 在 $[\omega_1, \omega_2]$ 频段的功率谱密度为

$$S(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sum_{\omega_i=\omega_1}^{\omega_2} W(\omega_i)}{(\omega_2 - \omega_1)/2\pi} = \frac{\sum_{\omega_i=\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} W(\omega_i)}{\Delta\omega/\pi}. \quad (13)$$

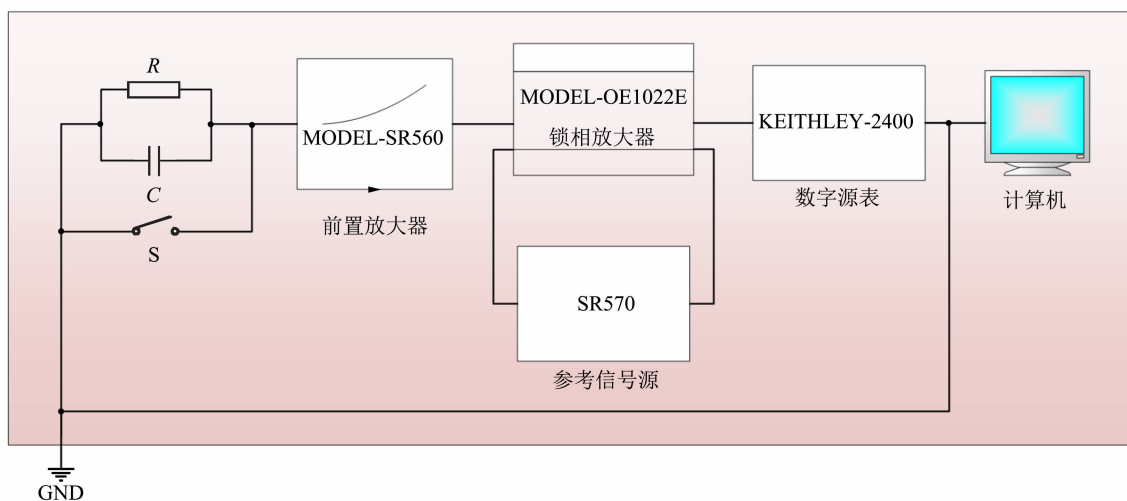
由测量的功率谱密度,即可求得玻尔兹曼常量和电子电荷为

$$k = \frac{S_{\text{Johnson}}}{4RT}, \quad (14)$$

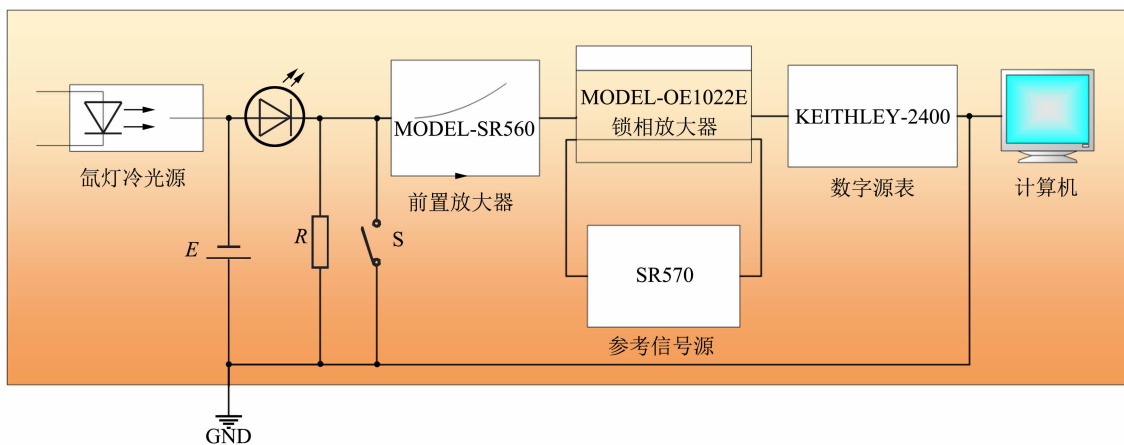
$$e = \frac{S_{\text{Shot}}}{2R^2\langle I \rangle}. \quad (15)$$

可见,在锁相放大器处输入参考信号源(SR570 REF),实现频谱搬移测量方法,既排除了低频信号的干扰,又可以通过使用较低采样频率的数字源表实现测量高频目的信号的目标.

热噪声和散粒噪声的测试电路如图4所示. 由于2种噪声信号十分微弱,同时存在较强闪烁噪声的干扰,因此如何获得微弱的目标信号是锁相放大器技术和实验方法的关键. 经过调研并向仪器生产方咨询,考虑到数字源表的A/D转换精度高于锁相放大器的A/D转换精度,同时还可以较大程度地减小测量系统误差,在锁相放大器与计算机之间接入数字源表,将锁相放大器获得的模拟信号输入数字源表进行A/D转换(不使用其内置的A/D转换模块),再由计算机进行数据采集、分析和处理.



(a) 热噪声测试电路



(b) 散粒噪声测试电路

图4 噪声测试电路图

3 实验数据处理及分析

3.1 基于 Matlab 的数据处理

实验数据处理流程如图5所示。在获取噪声数据(SMU 电流、SMU 电压和采样时间点)后,利用 Matlab 的内置函数进行自动读取,同时做 U - I 散点图检验数据点的分布,然后用 Matlab 对时域电压信号做 FFT(Fast Fourier transform)变换得到频域信号。带宽已经在后台设定,对该频段进行计算可以得到功率谱密度。另一方面,对

本底数据进行并行的相同处理,再将二者数值相减滤去本底噪声的影响,即可获得目标的功率谱密度。

实验中,噪声测试电路中的仪器参量设定如下:数字源表单次采样总时间 $T_{\text{tot}}=100\text{ s}$,前置放大器的放大倍数 $A_{\text{pre}}=500$,参考信号频率 $\omega_0=1\,000\text{ Hz}$;锁相放大器的灵敏度为 $10\text{ }\mu\text{V/pA}$,时间常量 $\tau=100\text{ ms}$,陡降系数为 24 dB/oct ,对应的等效带宽约为 8.7 Hz ,大于选取的频段全宽 $2\Delta\omega=6\text{ Hz}$ 。

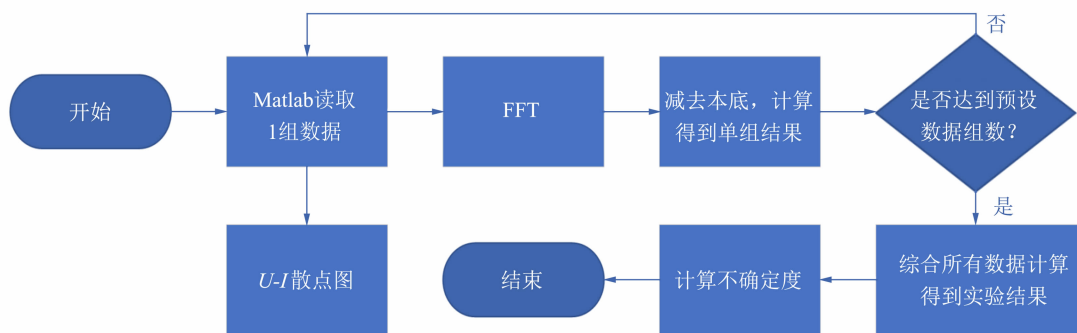


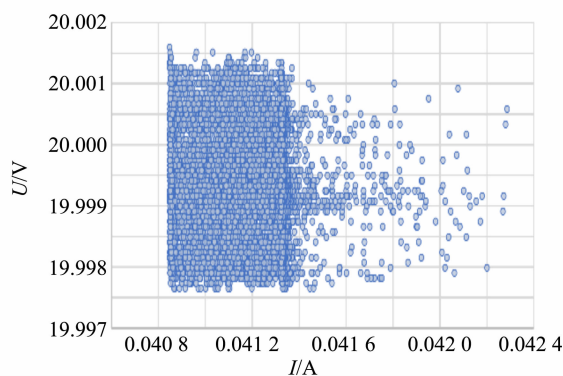
图5 数据处理流程图

3.2 热噪声实验

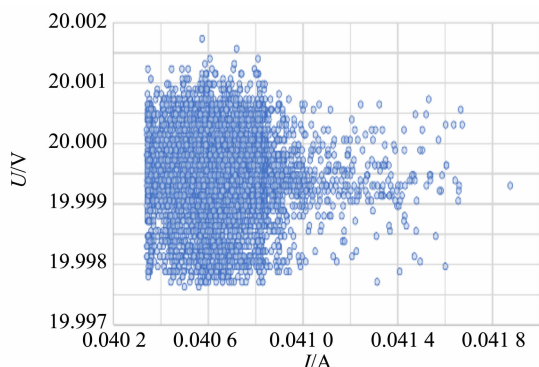
图4(a)所示电路的参量设置为: $R=50\text{ k}\Omega$, $C=1\text{ }\mu\text{F}$ 。图6是数字源表测量的其中1组热噪声 U - I 散点图,包含 10^4 个点的原始数据。需要注意的是,图中数据点代表的电流和电压值之所以明显为正值,是因为数字源表在测量过程中本

身加上了直流偏置。在数据处理过程中通过求均方差的方式,消除该偏置的影响。

经过数据处理,由式(14)测量得到玻尔兹曼常量的实验值为 $k=(1.39\pm0.02)\times10^{-23}\text{ J/K}$,与国际推荐值 $1.38\times10^{-23}\text{ J/K}$ 的偏差为 0.72% ,在可接受范围内。



(a) 接入 RC 回路的噪声分布



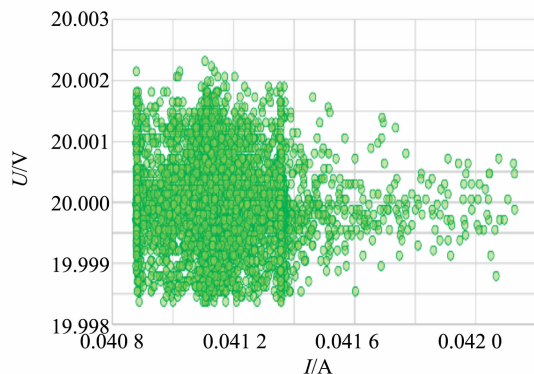
(b) 本底噪声(短接回路)分布

图 6 热噪声测量的 U - I 散点图

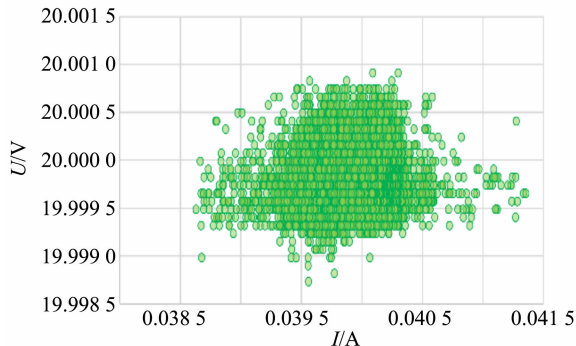
3.3 散粒噪声实验

图 4(b)所示电路的参量设置为: $R=50\text{ k}\Omega$. 图 7 为数字源表测量的其中 1 组散粒噪声 U - I 散点图. 与图 6 相同, 每幅图中均有 10^4 个点的原始数据.

同样, 经过 Matlab 程序计算, 由式(15)测定的电子电荷值为 $e=(1.62\pm 0.04)\times 10^{-19}\text{ C}$, 与国际推荐值 $1.60\times 10^{-19}\text{ C}$ 的偏差为 1.25%, 在可接受范围内.



(a) 接入二极管回路的噪声分布



(b) 本底噪声(短接回路)分布

图 7 散粒噪声测量的 U - I 散点图

本实验的探究虽有较好的实验结果, 测定的 k 和 e 与国际推荐值相比, 其误差均小于 2%, 但仍存在一些有待深入探究的问题. 例如, 在散粒噪声实验中, 由于将较大的电阻并联至光电二极管两端[见图 1(b)], 该电阻上的热噪声将对功率谱密度产生影响, 导致信噪比偏小, 并且热噪声的强度可能高于散粒噪声. 对此, 暂时还没有找到合适的解决方法.

另外, 散粒噪声和热噪声实际上是时域中的连续信号, 应当对信号作连续傅里叶变换得到连续的频谱. 但是在本实验中: 一方面, 计算机采得的信号是经 A/D 转换过后的离散时域数字信号; 另一方面, 对该离散时域信号作总时长为 T_{tot} 的傅里叶展开, 得到的是频域上的离散谱, 即相当于采用了离散频谱近似, 该处理方式在 T_{tot} 较小时(如本实验中采用的 $T_{\text{tot}}=100\text{ s}$)可能存在着一定的误差. 在进一步研究中, 可以试用文献[7]提出的适当调整时间常量等参量的方法, 优化测量参量, 提高信噪比. 这些均需要更加深入的探究.

4 结束语

本文构建了探究电路热噪声和散粒噪声特性的实验, 分析了热噪声和散粒噪声的信噪特点, 设计频谱搬移测量方法, 并通过获取目的信号测定了基本物理常量——玻尔兹曼常量 k 和电子电荷 e . 该实验为测定基本物理常量 k 和 e 提供了可行途径, 使学生了解电路噪声的物理过程, 学习用频谱搬移法将微弱目的信号从较强的本底噪声中提取/测量, 并掌握锁相放大器的测量技术.

参考文献:

[1] 吴泳华, 霍剑青, 浦其荣. 大学物理实验[M]. 北

- 京:高等教育出版社,2005:216-231.
- [2] 周子舫,曹烈兆. 热学 热力学与统计物理(下册) [M]. 北京:科学出版社,2014:196.
- [3] Millikan R A. The general law of fall of a small spherical body through a gas, and its bearing upon the nature of molecular reflection from surfaces [J]. *Physical Review*, 1923,21(1):1-23.
- [4] Kittel P, Hackleman W R, Donnelly R J. Undergraduate experiment on noise thermometry [J]. *American Journal of Physics*, 1978,46(1):94-100.
- [5] Spiegel D R, Helmer R J. Shot-noise measurements of the electron charge: An undergraduate experiment [J]. *American Journal of Physics*, 1995,63(6):554-560.
- [6] Musial W. Johnson noise and shot noise: The determination of the Boltzmann constant, absolute zero temperature and the charge of the electron [Z]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2013.
- [7] 郑远,姚星星,郭红丽,等. 基于数字锁相放大器的电阻噪声特性研究[J]. *物理实验*,2021,41(10):11-17.
- [8] Van Baak D A, Herold G. Response of a lock-in amplifier to noise [J]. *American Journal of Physics*, 2014,82(8):785-897.
- [9] 广州塞恩科学仪器有限公司. 微弱信号检测教学实验讲义[Z].
- [10] Nyquist J B. Thermal agitation of electricity in conductors [J]. *Physics Review*, 1928,32(7):97-109.
- [11] Oppenheim A V, Willsky A S, Nawab S H. 信号与系统[M]. 2版. 北京:电子工业出版社,2020:373.

Measuring Boltzmann constant and electron charge based on circuit noise

SONG Bingrui^{a,b}, ZHANG Lifan^{a,b}, QI Xiaojun^{a,b},

LIU Jiarui^a, ZHANG Chongwei^a, WANG Zhongping^c, ZHANG Zengming^c

(a. School of the Gifted Young; b. Yan Jici Talent Program of Physics;

c. Physics Experiment Teaching Center, School of Physical Sciences,

University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: A circuit system for measuring thermal noise and shot noise was designed and built. The weak electrical signal to be tested from strong background noise by using lock-in amplifier, then the Boltzmann constant and electron charge were measured based on frequency-shifting method through inputting reference signal. The experiment could strengthen students' comprehension of circuit noise, and a good grasp of technology of lock-in amplifier and measurement method of weak electrical signal.

Key words: Boltzmann constant; electron charge; frequency-shifting method; thermal noise; shot noise; lock-in amplifier; reference signal

[责任编辑:郭 伟]