

文章编号: 1005-4642(2023)09-0043-05

学  
生  
园  
地



## 基于固有频率和迈克耳孙干涉测杨氏模量

杨子瑜<sup>a†</sup>, 胡彦姗<sup>a†</sup>, 王雪珍<sup>b</sup>

(南京理工大学 a. 电子工程与光电技术学院; b. 理学院, 江苏 南京 210094)

**摘 要:** 基于材料的固有振动性质, 结合迈克耳孙干涉测量的高精度, 将待测材料和全反镜进行固性连接, 通过测量干涉中心点光强的周期变化研究材料的固有振动频率, 计算出材料的杨氏模量. 实验将测量对象转换为振动频率, 间接测量杨氏模量. 同时, 振动频率的变化可以通过示波器直观显示, 固有频率振动稳定且起振操作简单, 可通过增加周期数量减小误差.

**关键词:** 杨氏模量; 固有频率; 迈克耳孙干涉

**中图分类号:** O343; O436. 1; O321

**文献标识码:** A

**DOI:** 10. 19655/j. cnki. 1005-4642. 2023. 09. 007

杨氏模量是材料抵抗弹性形变能力的标志<sup>[1]</sup>, 也是工程设计中选择机械构件的重要依据之一. 固体材料杨氏模量的测量是理工院校物理实验中必做实验之一, 测量杨氏模量的方法一般有静态拉伸法<sup>[2]</sup>、梁弯曲法<sup>[3]</sup>、光杠杆法<sup>[4]</sup>、振动法<sup>[5]</sup>、劈尖干涉法<sup>[6]</sup>等, 也可以利用拉伸时金属丝的电阻变化来测量杨氏模量<sup>[7]</sup>.

传统杨氏模量的测量方法大部分是对微小形变进行直接测量, 本文在动力学方程的基础上结合迈克耳孙干涉的原理, 利用材料的固有频率与杨氏模量的关系, 通过迈克耳孙等倾干涉条纹中心光斑强度的周期性变化来获取材料稳定振动时的固有频率, 从而实现杨氏模量的间接测量. 相对于光杠杆法 1% 左右的相对误差, 在相对误差相差不大的前提下, 该方法避免了装置占地面积大、调节和观测困难等问题. 同时, 区别于传统迈克耳孙干涉法是对一定持续作用力下的微小形变的直接测量, 导致人为观测困难、受外界作用力变化干扰大, 单次只能测得 1 组数据等问题. 本实验将测量对象转换为振动频率进行间接测量, 振动频率的变化可以通过示波器直观显示. 另外, 固有频率振动稳定且起振操作简单, 也可通过

增加周期数量减小误差.

### 1 实验原理

#### 1.1 材料的杨氏模量与固有振动频率的关系

根据胡克定律, 在物体的弹性限度内, 应力与应变成正比, 该比值称为杨氏模量, 基本公式为

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}, \quad (1)$$

其中,  $E$  为杨氏模量,  $L$  为材料的长度,  $\Delta L$  为应力作用下的伸长量,  $\frac{F}{S}$  为应力,  $\frac{\Delta L}{L}$  为应变.

将材料制作为如图 1(a) 所示长为  $L$ 、横截面厚为  $a$ 、宽为  $b$  的长条棒状, 固定一端, 对其运动过程中的受力情况进行分析<sup>[8-9]</sup>. 取距离固定端为  $x$ 、长度为  $\Delta x$  的一小段材料, 将其形变放大, 由于两端的形变程度不同, 设其所受弯曲力矩分别为  $M$  和  $M + \Delta M$ , 两端的截面受到切应力分别为  $F$  和  $F + \Delta F$ , 如图 1(b) 所示. 可见该段材料中间层  $ghij$  (只有形变, 无拉伸或压缩, 在振动角度较小时可视为与  $xoz$  平面平行) 上部被拉伸且下部被压缩, 取左侧截面, 求其力矩, 分析距离中间层为  $y_0$  的薄层, 可以得到作用在该薄层截面的小元

**收稿日期:** 2023-03-29; **修改日期:** 2023-07-19

**作者简介:** 杨子瑜(2003—), 男, 湖南岳阳人, 南京理工大学电子工程与光电技术学院 2021 级本科生. E-mail: 1581742619@qq.com  
胡彦姗(2003—), 女, 浙江金华人, 南京理工大学电子工程与光电技术学院 2020 级本科生. E-mail: 13735685066@163.com

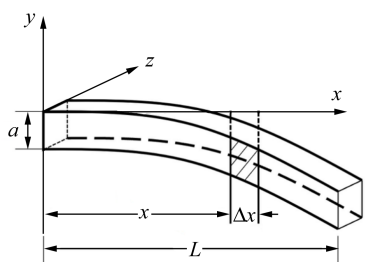
**通信作者:** 王雪珍(1979—), 女, 浙江温州人, 南京理工大学理学院副教授, 博士, 研究方向为组织光学. E-mail: njstwxz@njjust.edu.cn

†: 共同第一作者, 对本文贡献相同.

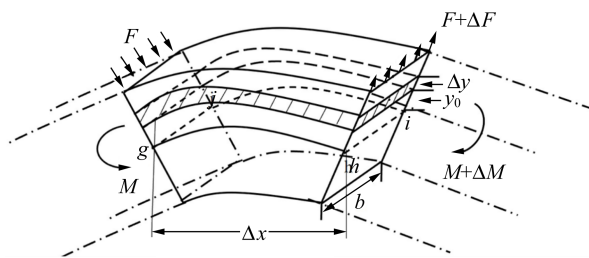
面积  $ds=b\Delta y$  上的总力为

$$f_s ds = E \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} y_0 ds, \quad (2)$$

其中,  $f_s$  为作用在  $ds$  上的长度形变应力,  $\Delta\varphi$  为截面的弯曲形变角,  $\Delta x$  为  $L$  上的微小段,  $y_0$  为薄层与中间层的距离, 如图 2 所示.



(a)



(b)

图1 材料部分形变放大图

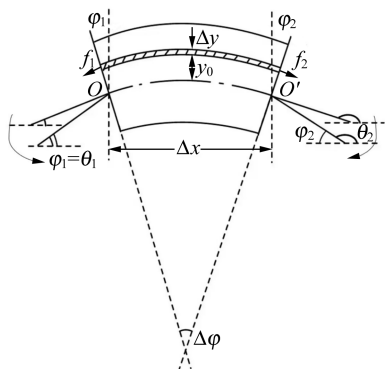
图2 材料  $gh$  侧平面图<sup>[8]</sup>

图2为  $gh$  侧的正视图,  $OO'$  为该平面的中心线, 作用在  $ds$  上的力对以  $O$  点的中心线(在中间层内而垂直于纸面)为轴的弯曲力矩, 对于整个截面积分记为截面张力对中心轴的弯曲力矩  $M$  为

$$M = \iint dM = E \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \iint y^2 ds = E \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} I, \quad (3)$$

其中,  $I = \frac{ba^3}{12}$  为截面绕垂直于棒轴转动的惯性矩.

由于振动幅度十分微小, 则有

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 &= \left. \frac{\partial\eta}{\partial x} \right|_x - \left. \frac{\partial\eta}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\eta}{\partial x} \right) \Delta x = -\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \Delta x, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\eta(x, t)$  为距离固定端  $x$  的截面在  $t$  时刻振动的位移,  $\varphi$  为角位移,  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  为  $O$  点和  $O'$  点侧截面旋转偏角, 则

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = -\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}, \quad (5)$$

$$M = -EI \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}. \quad (6)$$

又因为切应力的力矩和弯曲力矩平衡关系, 加之  $\Delta x$  极小, 所以可推知棒弯曲振动时的运动方程为

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -U^2 \frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}, \quad (7)$$

其中,  $U = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$ ,  $\rho$  为材料的密度,  $S = ab$  为截面的面积.

根据式(7), 可设弯曲振动时棒中每点都做简谐振动, 则

$$\eta(x, t) = Y(x) \cos(\omega t - \varphi), \quad (8)$$

其中,  $\omega$  为振动频率,  $Y(x)$  为该点做振动的振幅分布函数, 将式(8)代入式(7), 解得分布函数为

$$\begin{aligned} Y(x) = A \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{\omega}{U}} x \right) + B \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\omega}{U}} x \right) + \\ C \cos \left( \sqrt{\frac{\omega}{U}} x \right) + D \sin \left( \sqrt{\frac{\omega}{U}} x \right), \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $A \sim D$  均为常量.

根据边界条件可求其简谐振动的固有频率, 设固定点为原点  $o$ , 其边界条件为

$$\begin{cases} x=0, Y(0)=0, \frac{\partial Y}{\partial x}=0, \\ x=L, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}=0. \end{cases}$$

将边界条件代入式(9)中, 可得频率  $\omega$  满足:

$$\begin{aligned} \left[ \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{\omega}{U}} L \right) + \cos \left( \sqrt{\frac{\omega}{U}} L \right) \right]^2 = \\ \operatorname{sh}^2 \left( \sqrt{\frac{\omega}{U}} L \right) - \sin^2 \left( \sqrt{\frac{\omega}{U}} L \right). \end{aligned} \quad (10)$$

利用式(10)通过图解法确定其基频为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(1.875)^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad (11)$$

于是得到杨氏模量与基频之间的关系为

$$E = \frac{(2\pi L^2)^2 f^2}{(1.875)^4 I \rho S}. \quad (12)$$

### 1.2 基于迈克耳孙干涉光路测固有频率

实验光路如图 3 所示,调整仪器使激光器发出的光通过迈克耳孙光路后形成的干涉中心对准光电探测器的探头. 当干涉条纹中心为亮斑时,光程差为  $2d = k\lambda$ . 中心点的干涉亮斑每涌出 1 次,相当于平面镜移动半个波长,则  $\Delta d = N\lambda/2$ ,因此可以测量 nm 量级的微小位移.

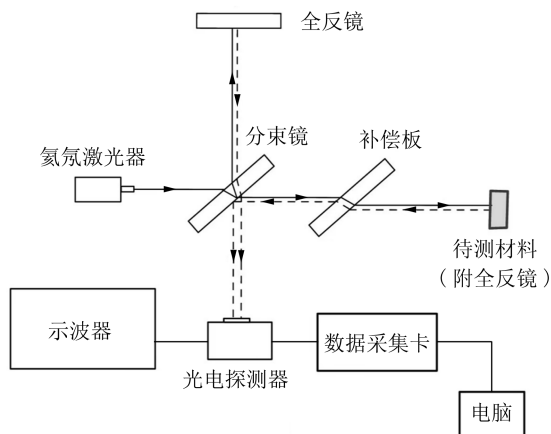


图 3 实验光路图

为了更好地展现光程差的变化,图 4 给出了全反射镜与材料连接处的放大图. 为了避免全反射镜对测量结果的影响,实际所用全反射镜的尺寸在满足反射的前提下应越小越好,待测材料与全反射镜的质量比应越大越好,以避免对材料的整体密度、惯性矩等产生较大影响. 实验中,待测材料和全反射镜的体积比约为 30(材料的体积为  $2\ 069\ \text{mm}^3$ ,全反射镜的体积为  $68\ \text{mm}^3$ ),质量比约为 85(材料的质量为  $16.200\ \text{g}$ ,全反射镜的质量为  $0.190\ \text{g}$ ),因此全反射镜对测量结果的影响较小.

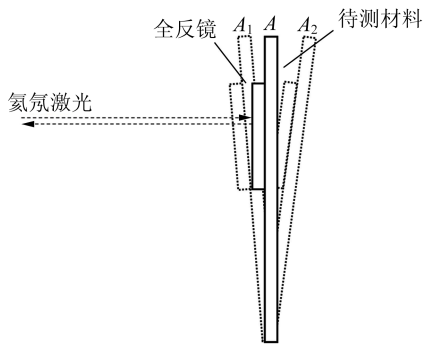


图 4 全反射镜与材料连接处的放大图

为避免其他方向的谐振产生较大影响,通过夹具夹紧厚度方向,同时材料的宽厚比(即  $b/a$ )

也需取较大值. 实验中,材料的宽厚比约为 23(宽  $20.000\ \text{mm}$ ,厚  $0.862\ \text{mm}$ ).

待测材料(附全反射镜)示意图如图 5 所示,观察到在这些参量设置下示波器显示图形变化如图 6 所示,与理论推导周期变化相符.

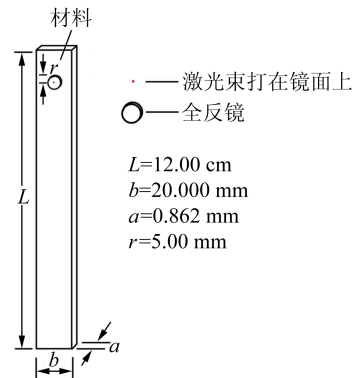


图 5 待测材料(附全反射镜)示意图

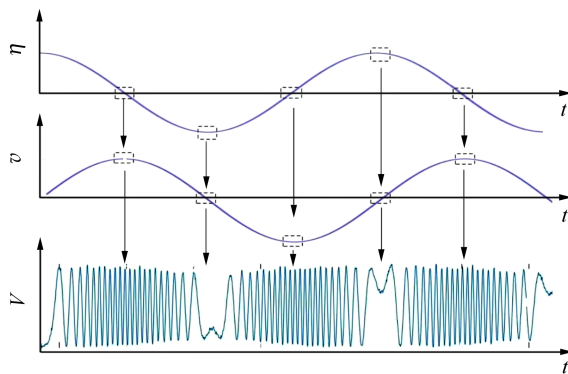


图 6 简谐振动位移、速度变化曲线和实际中心光斑光强随时间变化示意图

在待测材料下方(靠近固定端)沿着垂直于宽边方向施加力,使材料自由端自由振动(支架主要作用为使固定端不产生位移,其对自由端的作用力可以忽略),理论分析中已将该条件考虑进边界条件,此时的振动频率即为待测材料的固有频率. 将待测材料与迈克耳孙干涉仪的固定反射镜做硬性连接,则该点的位移信息将以光信号形式输出.

采用光电探测器将光信号转换成电信号,并将电信号接入示波器进行观察,可以观察到信号呈现周期调制的正弦规律变化. 根据式(8)可以推测板上任意一点振动位移可近似为正弦函数,而干涉级次变化  $\Delta N$  又与移动距离  $\Delta\eta$  成正比,即  $\Delta N \sim \Delta\eta$ ,本文定义示波器波形密度为单位时间内干涉级次改变量,即  $P = \Delta N / \Delta t$ ,结合振动点移动速度  $v = \Delta\eta / \Delta t$ ,故而可推导得出波形密度与

振动点移动速度成正比,如图6所示.速度越大,波形越密,故而2次疏密交替结束,代表物体1次正弦运动周期,则固有频率可以由最终采集到的电信号周期体现.

## 2 实验过程

### 2.1 实验仪器的安装与调整

实验中主要用到器材:氦氖激光器、扩束镜、半透半反镜、全反镜、光电转换、光电探测器、示波器(用于观察现象)及数据采集卡(用于采集数据计算固有频率),实验光路见图3.

搭建迈克耳孙干涉光路,将仪器固定于防震台上,并且保持激光器、扩束镜、全反镜(一面与待测材料相连)和分束镜的中心等高,使2个全反镜相互垂直,产生干涉圆环并且用光电探测器接收(图7).自由振动时可在示波器上看到明显的振动周期,由数据采集卡采集圆环光斑的光强信号数据.

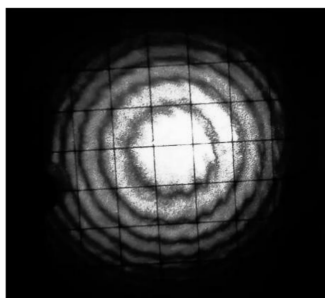


图7 干涉圆环

为了获取较好的信噪比,根据中心光斑尺寸在光电探测器探头处加直径为3~5 mm的光阑,使探测口仅接收中心光斑的信号.

### 2.2 实验操作

1) 给待测材料垂直于宽边的初始振动,此时肉眼观察不到材料的振动,但毛玻璃上会出现条纹的“涌出”或者“陷入”现象.

2) 将光电探测器的接收孔对准中心光斑并连接示波器,在示波器屏幕上可以观察到周期变化的信号.

3) 将光电探测器通过数据采集卡连接电脑,并利用电脑对数据进行处理.

## 3 实验数据及其处理

实验所用材料为45钢,  $E = 209 \text{ GPa}$ ,  $\rho =$

$7.85 \text{ g/cm}^3$ ,由直尺和千分尺测得  $L = 12.00 \text{ cm}$ ,  $a = 0.862 \text{ mm}$ .

由数据采集卡收集数据(采集速率为50 kb/s),利用计算机软件绘制出图像,如图8所示.图8最开始的区域为材料起振阶段,取材料稳定振动的阶段放大后可以看见更明显的周期变化,如图9所示.

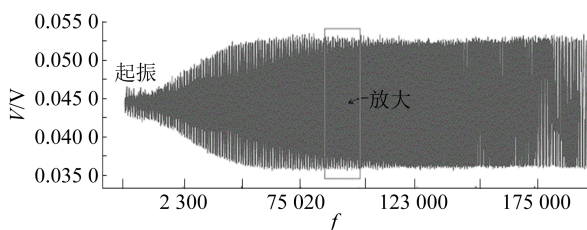


图8 数据采集卡收集数据

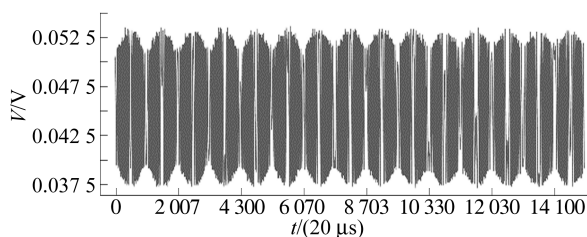


图9 材料稳定振动时的周期图像

图8~9所示的观测现象符合图6所示位移、速度与波形密度的理论解释.利用信号采集卡采集信号并对数据进行计算处理.由信号波形图可观察到,起振后待测材料将产生有规律的振动,取稳定后波段进行处理.计算材料的杨氏模量,测量结果见表1.计算得  $E = (207.3 \pm 2.4) \text{ GPa}$ .

表1 杨氏模量的测量结果(15个周期)

$15T/\text{ms}$	$T/\text{ms}$	$E/\text{GPa}$
302.00	20.13	207.15
301.80	20.12	207.42
302.16	20.14	207.15
302.00	20.13	207.15
301.90	20.13	207.29
301.80	20.12	207.42
301.94	20.13	207.23
301.80	20.12	207.42
302.20	20.15	206.88
301.80	20.13	207.15
301.60	20.11	207.70
302.10	20.14	207.01

## 4 结束语

本文所述方法适用于塑性片状材料以及具有一定弹性的片状金属材料。限制因素主要为材料的尺寸和性质,即材料的厚度会对推导过程中部分步骤产生影响,故而样品的尺寸应满足宽度与厚度的比值大于10;若在加工过程中材料易断裂或者不能制成所要求的形状,则不适用于本方案。因为增加了微小镜面,当材料与镜面的质量相差较大时,基本不影响测量,但若是纤维等小密度复合材料,则需选取较大体积才能满足要求,由于材料的体积过大,振动产生的偏角增大,可能无法产生稳定的等倾干涉条纹,因此对材料的密度有一定限制,同时,要求材料的密度够均匀(密度不均匀时,不同的振动方向可能测量的固有振动频率不同)。

### 参考文献:

- [1] 姜悦,吴官东. 基于迈克尔孙干涉仪与线阵 CCD 的金属丝杨氏模量测量方案[J]. 物理与工程, 2019, 29(4):93-96.
- [2] 车东伟,姜山,张汉武,等. 静态拉伸法测金属丝杨氏模量实验探究[J]. 大学物理实验, 2013, 26(2): 33-35.
- [3] 宋连鹏,周丽,孙瑜,等. 基于霍尔位置传感器的梁弯曲法测量杨氏模量实验的改进[J]. 大学物理实验, 2016, 29(3):59-63.
- [4] 张莉,荣振宇,王晗语,等. 光杠杆法测杨氏模量实验的一种改进方法[J]. 大学物理, 2022, 41(10): 29-32,79.
- [5] 肖旭冯,辉梁霄,龚恒翔,等. 基于单缝衍射原理的横梁弯曲法杨氏模量实验仪的结构变形分析[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2017, 31(1):46-52.
- [6] 许巧平. 劈尖干涉法测金属丝杨氏模量[J]. 大学物理, 2016, 35(4):30-32,42.
- [7] 麻福厚. 用惠斯通电桥测定杨氏模量[J]. 物理实验, 1998, 18(5):6-8.
- [8] 何祚镛,赵玉芳同. 声学理论基础[M]. 北京:国防工业出版社, 1981:172-178.
- [9] 徐振盛,马燕生. 用迈克尔逊干涉仪测定杨氏模量[J]. 大连轻工业学院学报, 1987(2):48-50.

## Measuring Young modulus based on natural frequency and Michelson interference

YANG Ziyu<sup>a†</sup>, HU Yanshan<sup>a†</sup>, WANG Xuezhen<sup>b</sup>

(a. School of Electronic Engineering and Optoelectronic Technology; b. College of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** Based on the natural vibration of the material and the high precision of Michelson interferometry, the tested material was solidly connected to the total reflection mirror. Then the natural vibration frequency was studied by measuring the periodic change of light intensity at the interference center point, thus the Young modulus was calculated based on the relation between the modulus and the natural frequency. In the experiment, the measured quantity could be converted into vibration frequency, and Young modulus was measured after that. At the same time, the change of vibration frequency could be directly displayed on oscilloscope, and the natural frequency retained stable and the operation of vibration was simple, and the measured error could be reduced by increasing the number of cycles.

**Key words:** Young modulus; natural frequency; Michelson interference

[编辑:任德香]