**文章编号:**1005-4642(2024)11-0014-07



普通物理实验

# 塑料沙彩色光晕现象及其色散特性分析

刘新军<sup>a</sup>,王 瑜<sup>a</sup>,陈奕霖<sup>b</sup>,廖 怡<sup>a</sup>,张玉杭<sup>c</sup>, 张金凤<sup>c</sup>,张亦文<sup>d</sup>,庞 海<sup>a</sup>,戴海涛<sup>a</sup> (天津大学 a.理学院;b.精密仪器与光电子工程学院; c.建筑工程学院;d.材料科学与工程学院,天津 300350)

摘 要:基于几何光学的原理,深入分析了在塑料沙中观察到的彩色光晕现象.借鉴雨滴产生虹的光学原理,推导 了光线在塑料微球颗粒表面的入射角与出射角和彩色光晕视角之间的数学关系,计算得出彩色光晕外边缘红光和内边 缘紫光在塑料沙中的视角分别为17.01°和14.72°,相应的折射率分别为1.5711和1.6031.探讨了彩色光晕的形成机 制、色散现象、光谱特征以及光强分布,阐释了在塑料沙中无法观察到霓现象的原因,即其视角超过了90°.

关键词:环形彩虹;塑料微球;色散;几何光学 中图分类号:O436.1 文献标识码:A DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2024.11.002

彩虹作为一种自然现象,以其绚烂的色彩吸 引人们驻足观赏.然而,彩虹往往转瞬即逝,人们 探索了多种方法来实现彩虹的持久展现.例如, 在瀑布和喷泉周围,彩虹的出现较为频繁<sup>[1-2]</sup>;在 晴朗天气,逆光向空中洒水或喷雾,可以产生人工 彩虹.此外,利用光源照射 µm 尺度的透明介质 小球也能够产生完整的全圆多级彩虹<sup>[3]</sup>.例如, 太阳直射在撒有塑料沙(可看作塑料微球)的路面 上,可观察到彩色光晕的光学现象,光晕呈圆形, 其中心区域亮度较高.当观察者站立时,其头部 的影子恰好位于光晕的中心位置.随着观察者的 移动,彩色光晕也会相应地跟随移动.当观察者 弯腰或者下蹲观察时,光晕的大小会有所减小. 显然,光晕的大小与观察者的位置及太阳高度角 有关.

本文借鉴雨滴形成彩虹的光学原理<sup>[4-6]</sup>,对塑 料沙中观察到的彩色光晕现象进行了深入分析. 研究了太阳高度角、观察者或手机摄像头的位置 等对光晕大小的影响,并通过计算机模拟计算了 彩色光晕的外边缘红光和内边缘紫光的视角,以 及相应光线在塑料沙中的折射率,探究了彩色光 晕的形状、光谱特性及其产生机制,有助于培养学 生的科学探究能力.

### 1 塑料沙颗粒的物性分析

塑料沙,亦称模型沙,在动床河工模型试验中 用于模拟河床形态并研究水流作用下的河床冲淤 变形.该材料通常为离子交换树脂的中间产物, 具体为苯乙烯二乙烯苯共聚珠体<sup>[7]</sup>,其颗粒形状 近似球形,堆积时呈现白色,如图1(a)所示.图1 (b)为河工试验后晾晒的塑料沙实物照片,由于 混入了泥土,从而呈现为暗灰色,但泥土的存在增 强了彩色光晕和周围背景的对比度,从而提升了 观测效果.图1(c)为金相显微镜(50×,JX-4RT 透反射)下的透射照片,塑料沙的粒径范围在 0.04~0.20 mm,中值粒径约为0.16 mm.塑料沙 具有稳定的化学性质,不吸水、无黏性、不溶于水, 且在水中不发生膨胀,其密度约为1.05 g/cm<sup>3</sup>.



(a)未使用的塑料沙

收稿日期:2024-02-04;修改日期:2024-09-15

作者简介:刘新军(1980-),男,山西阳城人,天津大学理学院副教授,博士,从事忆阻器神经元研究和大学物理教学工作. E-mail:xinjun.liu@tju.edu.cn



(b)河工试验后的塑料沙



(c)金相显微镜下的透射照片 图 1 塑料沙的实物照片和显微照片

# 2 塑料微球中光线行进的路线

将塑料沙颗粒看作塑料微球,依据雨滴形成 虹的光学原理<sup>[4-6]</sup>,可以分析光线在单个塑料微球 内部的传播路径以及观察彩色光晕的最佳角度, 如图 2 所示.



图 2 光线入射塑料微球左上方形成虹的光路图

太阳光可视为平行光束,当其从塑料微球的 不同位置入射时,会发生多方向的折射.太阳光 在点 T 处入射至塑料微球时,对应的入射角为 θ<sub>1</sub>,折射角为 θ<sub>2</sub>.光线在球面处折射后,在球内部 传播至点 U,此时发生第1次反射和第2次折射, 但第2次折射后的光线无法被观察到.随后,光 线在球内继续传播至点 V,发生第 2 次反射和第 3 次折射,第 3 次折射后的光线即形成虹.

根据折射定律,有

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 , \qquad (1)$$

其中,n为光线在塑料微球中的折射率.依据几 何关系,第3次折射后的出射光线相对于太阳光 的总偏向角为

$$\delta = 2\theta_1 - 4\theta_2 + 180^\circ. \tag{2}$$

图 2 中,出射光线抵达人眼时,与太阳光的夹 角,即观察角或视角 φ 定义为

$$\varphi = 180^{\circ} - \delta = -2\theta_1 + 4\arcsin\left(\frac{\sin\theta_1}{n}\right). \quad (3)$$

当  $\theta_1 = \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$ 时,可以得到光线的最小偏向角  $\delta_{\min}$ 与相应折射率 n 之间的关系为<sup>[8-9]</sup>

$$\delta_{\min} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 4 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} + 180^\circ,$$
(4)

因此,在塑料沙中观察到的虹的最大视角为

$$\varphi_{\max} = -2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} + 4 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}.$$
(5)

式(5)中, *φ*<sub>max</sub>是 *n* 的单值函数.因此, 若已知某光 线的 *φ*<sub>max</sub>, 则可以通过计算机进行数值求解, 以获 得此光线在塑料沙中的折射率 *n*.

#### 3 彩色光晕形状和大小

#### 3.1 理论分析

如图 3 所示,太阳位于观察者(或手机摄像 头)的正后方,观察者处于光锥的顶点位置.该光 锥的顶角为虹视角的 2 倍,即 2*q*.观察到的彩色 光晕实际上是光锥的圆截面 *BMCN*,与地面在点 *B*处相交.彩色光晕的具体位置和尺寸取决于太 阳的高度角、观察者的具体位置以及塑料沙的布 置方式(如撒在地面上或涂抹在墙面上).

太阳高度角 $\alpha$ ,亦称为太阳俯仰角,定义为太阳光线与地平面之间的夹角.通过 $\alpha$ ,结合观察者(或手机摄像头)相对于地面的高度h,以及视角 $\varphi$ ,可以推导出观察者看到(或手机摄像头捕捉到)的彩色光晕 *BMCN* 的半径 $r_1$  的计算公式为

$$r_1 = \frac{h\sin\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$
 (6)





图 3 彩色光晕实景图分析

根据式(6),当 h 增加时, $r_1$  也随之增大;而 当  $\alpha$  增加时, $r_1$  则减小.彩色光晕 BMCN 的中心 点记为  $O_1$ ,其横向直径 MN 平行于地面,纵向直 径 BC 与地面的夹角为 90°- $\alpha$ .满足  $\varphi$  的塑料沙 分布范围在淡黄色椭圆 BEDF 区间内(见图 3). 对于位于 B 点的塑料沙,太阳光从塑料微球的左 下方入射,从左上方出射并会聚至人眼;而对于位 于 D 点的塑料沙,太阳光从塑料微球的左上方入 射,从左下方出射并会聚至人眼,如图 3 中的红框 所示.

椭圆 BEDF 的中心点标记为O',其中长轴为 BD,短轴为 EF,因此椭圆的长半轴  $a = \frac{BD}{2}$ ,短半 轴  $b = \frac{EF}{2}$ .通过点 D 作光锥的第 2 个圆形截面 GPDQ,其中心点标记为  $O_2$ .该圆形截面 GPDQ 的半径  $r_2$  的计算公式为

$$r_2 = \frac{h\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}.$$
 (7)

通过点 H 作光锥的第 3 个圆形截面 IJHK, 其中心点标记为 O<sub>3</sub>,其中 EF 位于该截面内,H 为 CD 的中点,且 O'H=r<sub>1</sub>.根据几何关系,该圆 形截面 IJHK 的半径r<sub>3</sub> 的计算公式为

$$r_3 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2). \tag{8}$$

因此,椭圆 BEDF 的 a 和 b 分别表示为

$$a = \frac{1}{2}(OD - OB) = \frac{1}{2} \left[ \frac{h}{\tan(\alpha - \varphi)} - \frac{h}{\tan(\alpha + \varphi)} \right] = \frac{h \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi}, \tag{9}$$

$$b = \sqrt{r_3^2 - (r_3 - r_1)^2} = \sqrt{r_1 r_2} = \frac{h \sin \varphi}{\sqrt{\sin (\alpha + \varphi) \sin (\alpha - \varphi)}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} - 1}}.$$
 (10)

椭圆 BEDF 的长轴 2a 和短轴 2b 是可以测量的 物理量.实验中,可以分别测量对彩色光晕外边 缘红光有贡献椭圆的 2a<sub>紅</sub> 和 2b<sub>红</sub>,以及对彩色光 晕内边缘紫光有贡献椭圆的 2a<sub>\*</sub>和 2b<sub>\*</sub>.

由式(9)可知, $\varphi$ 不能直接表示为 $\alpha$ ,h和a的 函数,只能通过计算机进行数值求解以确定  $\varphi$ . 相比之下,利用式(10)可以将  $\varphi$ 表示为 $\alpha$ ,h和b的函数,即

$$\varphi = \arcsin\left[\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}}\right],$$
 (11)

结合式(5),可以通过数值求解得到光线在塑料沙中的折射率 n.

3.2 实验数据记录和分析

实验步骤如下:

1)将卷尺平直放置于撒有塑料沙的路面上, 启动手机的照相功能,对准路面,并确保手机平面 尽可能垂直于阳光的入射方向,以确保手机中显 示的彩色光晕为完整圆形.

2) 在保持手机中彩色光晕可见的状态下,通 过移动手机或调节卷尺位置,使卷尺尽量与手机 中彩色光晕的横向或纵向直径对齐,并拍摄照片.

3)使用卷尺测量手机摄像头至地面的高度 h,通过"天文通"小程序记录当前的太阳高度角 α 和方位角 β.

4)从拍摄的照片中读取红(紫)光的长轴 2a<sub>結</sub> (2a<sub>素</sub>)和短轴 2b<sub>紅</sub>(2b<sub>素</sub>).

5)利用 *α*,*h*,2*a* 和 2*b*,通过式(9)和式(11)可 以计算得到边缘红光和紫光的视角 *φ*. 所有实验 结果见表 1.

组别	h/m	$\alpha/(^{\circ})$	eta/(°)	$2a_{st}/{ m m}$	$2b_{\mathrm{st}}/\mathrm{m}$	$arphi_{\mathrm{st}}/(\degree)$	$n_{\pm 1}$	$2r_{1,\text{ME}}/\mathrm{m}$	$2b_{ m gs}/{ m m}$	$arphi_{ m gg}/(\degree)$	$n_{ m g}$	$2r_{1, m}/m$
1	1.29	70.66	216.81	_	0.86	17.27	1.567 5	0.76	0.72	14.60	1.604 8	0.65
2	0.52	70.66	216.81	_	0.35	17.43	1.565 3	0.31	0.30	15.06	1.598 1	0.27
3	1.26	60.81	116.33	_	0.89	16.90	1.572 4	0.75	0.75	14.42	1.607 5	0.65
4	0.55	60.81	116.33	_	0.38	16.71	1.575 0	0.32	0.33	14.65	1.604 1	0.28
5	0.46	60.81	116.33	_	0.32	16.67	1.575 5	0.27	0.28	14.73	1.602 9	0.24
6	1.22	60.81	116.33	_	0.87	17.04	1.570 5	0.73	0.75	14.86	1.601 0	0.65
7	0.95	60.81	116.33	0.71	—	15.61	_	0.52	—	—	_	_
8	0.51	60.81	116.33	0.39	—	16.00	_	0.29	—	—	_	_
9	0.51	28.62	83.42	_	0.89	18.36	1.553 3	0.44	0.74	16.34	1.580 0	0.41
10	1.30	28.62	83.42	2.60	—	_	_	—	_	_	_	—

表1 彩色光晕测量记录

图 4 为彩色光晕效果及其测量照片.由于观 察者的影子在光晕中,使得同时测量椭圆的长轴 2a 和短轴 2b 变得困难.实验数据主要在中午时 段收集,此时的彩色光晕及地面椭圆相对较小. 而在早晨和傍晚,由于光晕和地面椭圆较大,观察 者需蹲下进行测量,这限制了对边缘红紫光精确 读数的获取.图 4 中的红色虚线圆圈表明,无论 是在早晨、中午还是晚上,观察到的光晕或手机拍 摄到的光晕,均呈现圆形.这与图 3 中描述的半 径为 r<sub>1</sub> 的彩色光晕 BMCN 一致.







(b) 测量短轴 2b图 4 彩色光晕效果及其测量照片

根据表 1 中第 1 组测量数据,当 h=1.29 m,  $a=70.66^{\circ}, 2b_{\text{fl}}=0.86$  m时,利用式(11),计算得 到  $\varphi_{\text{fl}}=17.27^{\circ}$ .同样地,对于边缘紫光,当  $2b_{\text{gl}}=$ 0.72 m,代人式(11)后得到  $\varphi_{\text{gl}}=14.60^{\circ}$ .利用式 (5),计算得到边缘红光在塑料沙中的折射率  $n_{\text{fl}}=1.5675$ ,以及边缘紫光的折射率  $n_{\text{gl}}=1.6048$ . 进一步,根据式(6),计算得到彩色光晕外边缘红 圈的直径  $2r_{1.\text{fl}}=0.76$  m,内边缘紫圈的直径  $2r_{1.\text{gl}}=0.65$  m,这些计算结果与实际观察到的光 晕大小基本一致.

在测量过程中,由于手机摄像头位置未固定 以及彩色光晕边缘红紫光位置的判定困难,导致 视角结果存在偏差.表1中包含10组数据,其中 使用后4组数据计算得出的结果偏差较大,因此 仅对前6组数据计算得到的 $\varphi$ 进行了平均处理, 得到光晕边缘红光的视角 $\overline{\varphi_{\pm}}$ =17.01°,边缘紫光 的视角 $\overline{\varphi_{\pm}}$ =14.72°.

基于测定的折射率  $n_{\text{ff}} \approx n_{\text{ff}}$ ,通过式(2),可 以绘制光线在塑料微球中第 3 次折射后出射的偏 向角  $\delta$  与入射角  $\theta_1$  的关系图,如图 5 所示.图中 明显可见  $\delta(\theta_1)$ 存在极小值,即最小偏向角  $\delta_{\text{min}}$ . 在  $\delta_{\text{min}}$ 附近,曲线较为平坦,表明在  $\delta_{\text{min}}$ 附近聚集 了较多的出射光线,光线密度较大,能量相对集 中,因此亮度较高,在此区域形成了虹现象.

同样地,利用式(3)可绘制视角  $\varphi$  与入射角 $\theta_1$ 的关系图(图 5).图中  $\varphi(\theta_1)$ 存在极大值,即最大 视角  $\varphi_{\text{max}}$ .当 $\theta_{1,\underline{\alpha}1}$ =45.61°时,边缘红光的最小偏 向角  $\delta_{\min,\underline{\alpha}1}$ =163.00°,最大视角  $\varphi_{\max,\underline{\alpha}1}$ =17.01°. 当 $\theta_{1,\underline{\alpha}1}$ =43.66°时,边缘紫光的最小偏向角 $\delta_{\min,\underline{\alpha}1}$ = 165.28°,最大视角  $\varphi_{\max,\underline{\alpha}1}$ =14.72°.

第 44 卷



图 5 偏向角  $\delta$  和视角  $\varphi$  与入射角  $\theta_1$  的关系图

#### 3.3 彩色光晕方位

太阳在不同时刻具有不同的高度角和方位 角,这导致观察到的彩色光晕在尺寸和方位上呈 现变化.具体来说,太阳高度角的不同会影响彩 色光晕的尺寸,而方位角的不同则会影响观察彩 色光晕的方向.相应地,对彩色光晕有贡献的地 面椭圆的大小和相对位置也会随之变化.

假设手机摄像头的垂直下方为坐标原点 O(图 3),地面椭圆中心坐标为  $O'(a + \frac{h}{\tan(a+\varphi)},$ 0),则椭圆方程为

$$\begin{cases} x' = x + a + \frac{h}{\tan(\alpha + \varphi)}, \\ y' = y. \end{cases}$$
(12)

其中, $x = a\cos t$ , $y = b\sin t$ , $t \in [0, 2\pi]$ . 根据太阳 的方位角 $\beta$ 对椭圆进行旋转. 旋转后的地面椭圆 方程为

$$\begin{cases} x'' = -(x\cos\beta - y\sin\beta) + \left(a + \frac{h}{\tan(a+\varphi)}\right)\sin\beta, \\ y'' = -(x\sin\beta + y\cos\beta) + \left(a + \frac{h}{\tan(a+\beta)}\right)\cos\beta. \end{cases}$$
(13)

根据式(13),可绘制出不同时刻(即不同 α 和 β) 对彩色光晕有贡献的塑料沙地面椭圆的大小及其 相对位置,如图 6 所示.在保持 h 恒定的条件下, 图 6 清晰地展示了地面椭圆在不同时间段的变化 情况:中午时分的地面椭圆尺寸最小,形状最接近 圆形;而早晨和傍晚的地面椭圆则相对较大.特 别地,早晨和傍晚的椭圆在长轴两端彩色光晕的 宽度存在差异,距离手机摄像头较远的一侧宽度 更宽,这一观察结果与实际使用卷尺测量得到的 数据相吻合. 然而,从拍摄的照片来看,由于参与 成像的模型沙所在平面与手机接收平面有一定夹 角,在接收平面的像与其本身相差1个仿射变换, 使得椭圆的长轴被压缩,最终彩色光晕呈现为圆 形(图4),而非椭圆形状,这表明观察到的光晕形 状与地面椭圆的几何形态并不完全对应.



图 6 7月上旬某日不同时刻对彩色光晕有贡献的 地面塑料沙椭圆范围的模拟效果图

#### 4 拓展讨论

# 4.1 虹出射光的光强分析

阳光照射在塑料微球上(图 2),球面上各点 的光线入射角 $\theta_1$ 存在差异.其中,通过塑料微球 球心O的中心光线的 $\theta_1=0$ ,随着偏离中心光线 的距离增加, $\theta_1$ 逐渐增大,最大可接近 90°.不同 入射角的光线在经过折射、反射和再次折射后,从 塑料微球的V点附近射出时,不再保持平行,而 是以辐射状散开.这些辐射光线在空间中的分布 并不均匀,表现出强度上的不同,即某些区域的光 线密度较高,而其他区域的光线密度较低.

辐射光线的强度可以通过辐射强度来表征, 反映了辐射源的功率大小.当光线具有相同的波 长时,人眼对强度较大的光线更为敏感,即更容易 感知到辐射强度较高的光线.根据菲涅耳公 式<sup>[10-11]</sup>,经过折射一反射一折射后的出射光线相 对辐射通量为

$$\eta = \frac{E^2}{E_0^2}.$$
 (14)

其中,出射光振幅的平方  $E^2 = E_{\perp}^1 + E_{\parallel}^2$ ,入射光 振幅的平方  $E_0^2 = E_{0\perp}^2 + E_{0\parallel}^2$ . 入射光线的垂直偏 振分量在塑料微球表面经历 2 次折射和 1 次反射 后, $E_{\perp}^2$ 与  $E_{0\perp}^2$ 的比值为

$$\frac{E_{\perp}^{2}}{E_{0\perp}^{2}} = T_{1\perp}R_{2\perp}T_{3\perp} = (1 - R_{1\perp})R_{2\perp}(1 - R_{3\perp}),$$
(15)

其中, $T_{1\perp}$ 和 $T_{3\perp}$ 分别为光线的垂直偏振分量在 塑料微球表面T和V处 2次折射的透射率; $R_{1\perp}$ ,  $R_{2\perp}$ 和 $R_{3\perp}$ 分别为光线的垂直偏振分量在塑料微 球表面T,U和V处的反射率,且满足

$$R_{1\perp} = R_{2\perp} = R_{3\perp} = \frac{\sin^2\left(\theta_1 - \theta_2\right)}{\sin^2\left(\theta_1 + \theta_2\right)}.$$

因此,

$$\frac{E_{\perp}^2}{E_{0\perp}^2} = \left[1 - \frac{\sin^2\left(\theta_1 - \theta_2\right)}{\sin^2\left(\theta_1 + \theta_2\right)}\right]^2 \frac{\sin^2\left(\theta_1 - \theta_2\right)}{\sin^2\left(\theta_1 + \theta_2\right)}.$$
 (16)

同理,

$$\frac{E_{\parallel}^{2}}{E_{\parallel}^{2}} = \left[1 - \frac{\tan^{2}\left(\theta_{1} - \theta_{2}\right)}{\tan^{2}\left(\theta_{1} + \theta_{2}\right)}\right]^{2} \frac{\tan^{2}\left(\theta_{1} - \theta_{2}\right)}{\tan^{2}\left(\theta_{1} + \theta_{2}\right)}.$$
 (17)

由于  $E_{0\perp}^2 = E_{0\parallel}^2 = \frac{E_0^2}{2}$ ,因此式(14)可以改写为

$$\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{\perp}^2}{E_{o\perp}^2} + \frac{E_{\parallel}^2}{E_{o\parallel}^2} \right).$$
(18)

辐射强度定义为点光源在特定方向上单位立体角内发射的辐射功率,该数值由辐射通量除以相应的立体角得到.为了计算塑料微球表面经过 折射一反射一折射过程后出射光线的立体角,可以将立体角简化为二维平面角进行分析.考虑1 束红光,其垂直截面宽度极小,当这束红光入射至 塑料微球表面时,入射角θ,的变化为dθ,.经过 折射一反射一折射过程后,该束红光出射时的散 射角,即偏向角的变化为dδ,并将其视为简化的 二维平面角.利用相对辐射通量的变化 dη 与相 应的散射角变化 dδ,可以得到出射光的相对辐射 强度为

$$I = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\delta} = \frac{\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}\theta_1}.$$
 (19)

由式(2)可知,

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\theta_1} = 2 - \frac{4\mathrm{cos}\ \theta_1}{\sqrt{n^2 - \mathrm{sin}^2\ \theta_1}}.$$
 (20)

由于 $\eta(\theta_1)$ 是 $\theta_1$ 的复杂函数,无法直接获得  $\frac{d\eta}{d\theta_1}$ 的表达式.基于式(14)~(18),可以绘制 $\eta$ 与  $\theta_1$ 的关系曲线,再对该曲线进行数值微分,进而 得到 $\frac{d\eta}{d\theta_1}$ 随 $\theta_1$ 的变化曲线.在相同 $\theta_1$ 的条件下, 结合式(19)和式(20),可以确定出射光的I随 $\theta_1$ 的变化关系.

图 7(a)为边缘红光的 I 随  $\theta_1$  的变化关系.

结果表明:当 $\theta_1$ =45.61°时,可得  $I_{\max,\pounds}$ =4,且仅 在接近45.61°的角度范围内光强较强.进一步 地,可以绘制 I 随 $\varphi$ 的变化关系曲线,以展示散射 光的强弱分布,如图 7(b)所示.当边缘红光在  $\varphi_{\max}$ =180°- $\delta_{\min,\pounds}$ =17.01°处,I 达到峰值.



图 7 边缘红光的 I 随 $\theta_1$  和 $\varphi$ 的变化曲线

#### 4.2 关于霓的讨论

如图 8 所示,光线在塑料微球的球面 V 点反射后,继续在球内传播至 W 点,并发生第 3 次反射和第 4 次折射.经过这一系列光学行为后的出射光线,将形成霓.

根据几何关系,第4次折射后的出射光线相 对于太阳光的总偏向角为

$$\delta' = 2\theta_1' - 6\theta_2' + 360^{\circ}. \tag{21}$$

因此,该光线的观察角,即视角为

$$\varphi' = \delta - 180^{\circ} = 2\theta_1' - 6\theta_2' + 180^{\circ}.$$
 (22)

当入射角 
$$\theta_1' = \arcsin \sqrt{\frac{9-n^2}{8}}$$
时,可以得到光

线的最小偏向角  $\delta'_{\min}$  与折射率 n 的关系为<sup>[7-8]</sup>



图 8 光线入射塑料微球左下方形成霓的光路图

利用前面测定的边缘红光和紫光在塑料沙中的折射率,可以计算出光线在塑料微球中经过第 4 次折射后出射霓的  $\delta'_{min}$ 和  $\varphi'_{min}$ .根据式(21),可 以得到霓中光线在塑料微球中 3 次折射后的偏向 角  $\delta'$ 与入射角  $\theta'_{1}$ 之间的关系,如图 9 所示,其中  $\delta'(\theta'_{1})存在极小值,即 \delta'_{min}$ .根据式(22),可以得 到霓的视角  $\varphi'$ 与入射角  $\theta'_{1}$ 之间的关系(图 9),其 中  $\varphi'(\theta'_{1})存在极小值,即 \varphi'_{min}$ .



图 9 霓现象中  $\delta' \pi \varphi' 与 \theta_1'$ 的关系曲线

当 $\theta'_{1,\pm}=64.63^{\circ}$ 时, $\delta'_{\min,\pm}=278.61^{\circ}$ , $\varphi'_{\min,\pm}=98.61^{\circ}$ ;当 $\theta'_{1,\pm}=63.71^{\circ}$ 时, $\delta'_{\min,\pm}=283.39^{\circ}$ ,  $\varphi'_{\min,\pm}=103.39^{\circ}$ .由于霓中边缘红光和边缘紫光 的最小视角均大于 90°,且观察者背对太阳站立,因此人眼无法观察到霓现象,只能观察到虹现象,这与实际观察结果相符.

#### 5 结束语

本文基于路面塑料沙上观察到的彩色光晕现 象,采用几何光学方法分析了阳光在塑料微球颗 粒内部的传播路径及其出射过程.对彩色光晕虹 的形成机制、色散现象、光谱特性和光强分布进行 了探讨.计算得到彩色光晕边缘红光的视角  $\varphi_{\Xi}=17.01^{\circ},边缘紫光的视角为 <math>\varphi_{\pm}=14.72^{\circ},以$ 及塑料沙中红光和紫光的折射率分别为  $n_{\Xi}=1.5711 n_{n_{\pm}}=1.6031.本文所采用的设备简$ 易,操作便捷,适用于家庭展示及科普教育活动.研究结果不仅加深了学生对彩色光晕形成机制的理解,而且还增强了学生对光谱和色散现象的认识,有助于培养学生的科学探究能力.

#### 参考文献:

- [1] 李元. 瀑布上的彩虹[J]. 数码摄影,2008(5):120-123.
- [2] 刘克杰.人工喷泉彩虹及其成因[J]. 阴山学刊(自 然科学版),2009,23(1):31-33.
- [3] 詹卫伸,李睿. 全圆多级彩虹装置:中国,CN10574 1659A [P]. 2016-07-06.
- [4] 张文慧,张协成. 虹的几何光学原理初探[J]. 物理 教学,2008,30(9):23-25.
- [5] KHARE V, NUSSENZVEIG H M. Theory of the rainbow [J]. Physical Review Letters, 1974, 33 (16):976-980.
- [6] HAUBMANN A. Rainbows in nature: Recent advances in observation and theory [J]. European Journal of Physics, 2016,37(6):063001.
- [7] 陈俊杰.常用模型沙基本特性研究[M].郑州:黄 河水利出版社,2009:165.
- [8] 刘涵,李咏璇,区艺锋,等. 高阶彩虹现象的观测及 其色散特性研究[J]. 物理实验,2022,42(8):14-19,27.
- [9] 王思慧,王宁悦,周惠君. 多重彩虹演示实验[J]. 大学物理,2012,31(10):22-24.
- [10] 王永祥,耿志刚.大学物理实验[M].北京:高等 教育出版社,2016:4-27.
- [11] 郁道银,谈恒英.工程光学[M].4版.北京:机械 工业出版社,2016:316-321.

(下转27页)

QIU Peng, LIN Xiang, YAN Hao

(School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: A multiple degree-of-freedom (DOF) displacement measurement method based on Michelson equal-thickness interference was proposed, which could realize the real-time, high-precision measurement for the movement of a target reflector in 3-DOF, where one was for translation and two for rotation. The measurement principle, experimental design, and test results of the interference were presented, verifying the feasibility of the measurement scheme. Through calibration tests with a high-precision commercial platform, a 3-DOF motion measurement was achieved. The displacement and angular sensitivities reached 1 nm/Hz<sup>1/2</sup>@>1 mHz and 10  $\mu$ rad/Hz<sup>1/2</sup>@>1 mHz, with dynamic ranges exceeding 10 mm and 100 mrad respectively. This measurement method could be widely applied in university physics experiment teaching, micro-displacement measurement, and industrial precision manufacturing.

Key words: Michelson interferometry; equal-thickness interference; three-degree-of-freedom measurement [编辑:龙玉梅]

(上接20页)

# Analysis of colored halo phenomenon and its dispersion characteristics in plastic sand

LIU Xinjun<sup>a</sup>, WANG Yu<sup>a</sup>, CHEN Yilin<sup>b</sup>, LIAO Yi<sup>a</sup>, ZHANG Yuhang<sup>c</sup>, ZHANG Jinfeng<sup>c</sup>, ZHANG Yiwen<sup>d</sup>, PANG Hai<sup>a</sup>, DAI Haitao<sup>a</sup>
(a. School of Science; b. School of Precision Instrument and Optoelectronics Engineering; c. School of Civil Engineering; d. School of Materials Science and Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

Abstract: Based on the principles of geometric optics, this paper developed the analysis of the colorful halos observed in plastic sand. Inspired by the optical principles of the rainbow formation by raindrops, we derived the mathematical relationships among the incident angle of light on the surface of plastic microsphere particles, the emergent angle, and the viewing angle of the rainbow. The calculation result said that the viewing angles of the outer edge red light and inner edge violet light in the colorful halos within plastic sand were 17. 01° and 14. 72° respectively, and the corresponding refractive indices were 1. 571 1 and 1. 603 1. Furthermore, the study was explored on the formation mechanism, dispersion phenomena, spectral characteristics, and light intensity distribution of these colorful halos. Additionally, it clarified the reason why the secondary rainbow phenomenon could not be observed in plastic sand, namely, its viewing angle exceeded 90°.

Key words: circular rainbow; plastic microspheres; dispersion; geometrical optics

[编辑:龙玉梅]