

文章编号:1005-4642(2025)03-0057-07

近轴条件下水滴放大镜的放大倍数

张艳超^a, 王学璟^a, 孙春芳^{a,b}, 贾艳^{a,b}, 王帅轲^a,
陈宇童^a, 刘帆^a, 赵梓杉^a, 张钰双^a, 戴瑞^{a,b}

(东北师范大学 a. 物理学院; b. 物理学国家级实验教学示范中心(东北师范大学), 吉林长春 130024)

摘要:建立了水滴在亲水/疏水性玻璃表面上的旋转椭球体的几何模型,揭示了其几何形状与水滴体积及玻璃片亲水/疏水性质的定量关系。利用费马原理,在近轴光线条件下推导了旋转椭球面的物像公式和放大倍数的计算公式,实验探究了物距、水滴体积及玻璃片亲水/疏水性质对放大倍数的影响规律。结果表明:基于水滴形状的数学分析,可理论计算并探究水滴的放大倍数随物距、水滴体积及玻璃片亲水/疏水性质的变化规律,通过调节物距、水滴体积及玻璃片亲水/疏水性质等参量实现对成像效果的精确调控。

关键词:水滴透镜; 放大倍数; 水滴体积; 亲水/疏水性质; 物像公式

中图分类号:O435.1

文献标识码:A

DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2025.03.008

在光学成像领域,探索新型、简易且高效的成像系统具有重要意义。水滴透镜作为自然形成且易于获取的光学元件,具有调节精度高、体积小、响应速度快等优势。目前,针对水滴透镜的部分研究关注了水滴形状形成机制受基底形状和润湿特性等因素的影响^[1-3],以及液滴透镜在医学、成像系统、投影系统等领域的实际应用^[4-10]。然而,现有研究在理解水滴透镜的光学特性存在局限,关于水滴透镜放大倍数的研究仍较为有限,尤其是物距、水滴体积及基底材料亲水/疏水性质对放大倍数的综合影响机制尚未得到充分揭示。

本文基于 2024 年 CUPT 赛题第 2 题“Droplet microscope”展开研究,透过放置在玻璃表面上的单个水滴观察成像,发现此成像系统具有与透镜类似的成像特性,且由于其具有放大效果,因此文中统称为水滴放大镜。本文基于水滴旋转椭球体的几何形状,采用逐面成像法,分析水滴透镜的光学成像特性,重点探究了物距、水滴体积和玻璃片亲水/疏水性质对水滴放大镜的放大倍数的影响机制。以数学分析为基础的几何计算与以球面成像为核心的光学计算建立联系,可为水滴放

大镜的研究提供理论模型和实验分析。

1 理论分析

1.1 水滴放大镜的形状

水滴在平面玻璃上可形成中间厚、边缘薄的形状,表现出等同于光学透镜的性质,光学透镜的几何参量对水滴成像特性和效果有极大影响^[11]。与透镜类似,水滴的形状也是影响水滴放大镜光学性质的主要因素,而水滴的形状完全由接触面的表面张力系数和其体积确定,即受玻璃片的亲水/疏水性质和重力效应的影响。

玻璃片的亲水/疏水性质决定了水滴接触角的大小,进而影响水滴的几何形状。如图 1 所示,水滴在不同亲水/疏水性质的玻璃片上,其接触角θ呈现明显差异,因此水滴形状存在较大差异。

重力效应是影响水滴分布的重要因素之一,其影响程度用无量纲键数 B_0 (邦德数)来衡量^[2]:

$$B_0 = \frac{\rho g (6V/\pi)^{2/3}}{\gamma}, \quad (1)$$

其中, ρ 为水的密度, g 为重力加速度, V 为水滴体积^[1], $\gamma = 72.8 \text{ mN/m}$ 为水的表面张力系数。

收稿日期:2024-11-30; **修改日期:**2025-02-19

基金项目:吉林省高等教育教改研究课题立项支持项目(No. 2022R2VRL9O000D, 20224BRK10Q001I); 教育部物理类专业教学指导委员会理论力学课程教学研究项目(No. JZW-23-LL-09); 2023 年吉林省研究生教育教学改革研究课题资助项目

作者简介:张艳超(2004—),男,河北邯郸人,东北师范大学物理学院 2022 级本科生。E-mail:zhangyc518@nenu.edu.cn
通信作者:孙春芳(1981—),女,山东济宁人,东北师范大学物理学院副教授,博士,研究方向为量子计算。E-mail:suncf997@nenu.edu.cn

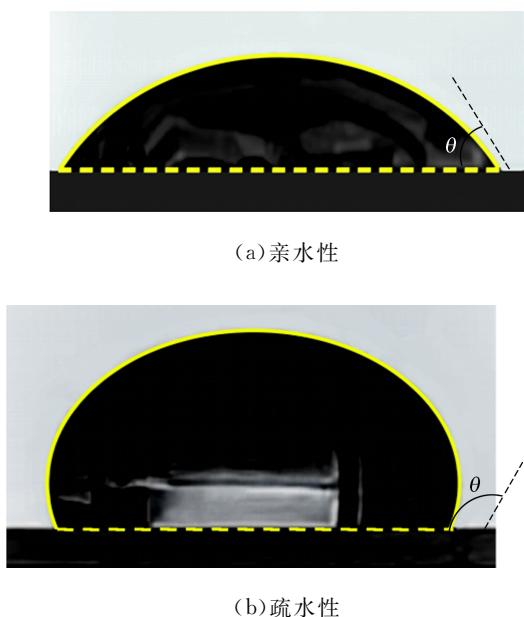


图 1 亲水/疏水性玻璃片上的水滴

在平坦的基板上,稳定状态下的水滴形状由自由表面能最小化原理决定。

1) 考虑重力效应时,水滴的形状通常为旋转椭球体^[2],如图 2(a)所示,利用式(1)计算水滴的体积 $V > 20 \mu\text{L}$ 时 $B_0 > 1$;

2) 对于 $B_0 \ll 1$ 的水滴,重力的影响可忽略不计^[1],水滴的形状近似为球冠,如图 2(b)所示。



(a) 旋转椭球体水滴



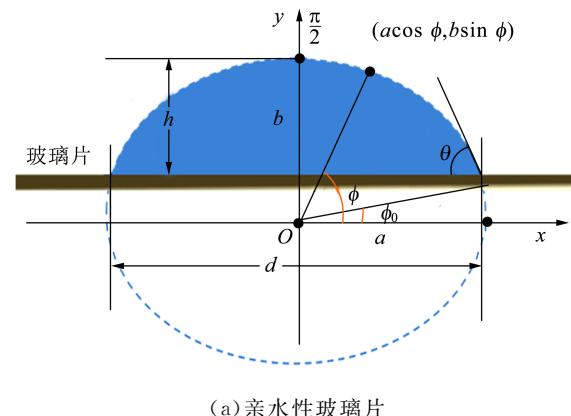
(b) 球冠水滴

图 2 水滴的侧视图

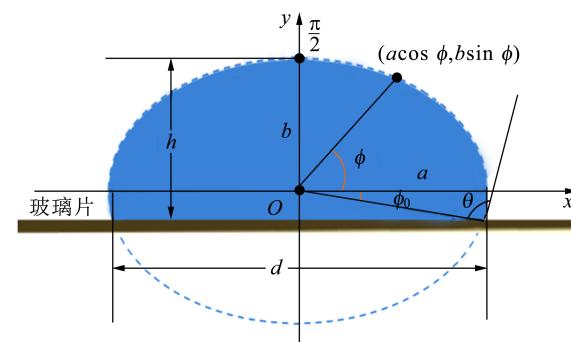
1.2 玻璃片上水滴放大镜的几何参量

将水滴滴在玻璃片上,其横截面的几何形状如图 3 所示。为方便分析,定义椭圆中心为坐标

原点 O , a 为椭圆的半长轴, b 为椭圆的半短轴, ϕ_0 为起始角, θ 为接触角, h 为水滴在玻璃片上的高度, d 为水滴在玻璃片上的浸湿宽度。椭圆上任意一点坐标可以表示为 $(a \cos \phi, b \sin \phi)$, 其中 $\phi \in (\phi_0, \frac{\pi}{2})$ 为该点的方位角。



(a) 亲水性玻璃片



(b) 疏水性玻璃片

图 3 不同玻璃片上的旋转椭球体水滴模型

椭圆弧在固体表面的斜率为

$$k = \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a \tan \phi_0} = \tan(\pi - \theta), \quad (2)$$

水滴的体积 V 可以表示为^[1]

$$V = \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2 dy = \frac{1}{3} \pi a^2 b (\sin^3 \phi_0 - 3 \sin \phi_0 + 2), \quad (3)$$

压力平衡方程为^[3]

$$2\gamma \frac{b}{a^2} + \rho g b = \gamma \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} \right). \quad (4)$$

利用几何特性,可以得到水滴高度 h 和浸湿宽度 d 为

$$h = b(1 - \sin \phi_0), \quad (5)$$

$$d = 2a \cos \phi_0. \quad (6)$$

对于体积为 V 的水滴,测量其在玻璃片上的接触角 θ 后,联立式(2)~(6),即可计算出水滴的 a, b, h 和 d ,实现水滴几何参量的量化计算,进而分析水滴放大镜的焦距.

1.3 放大倍数

以亲水玻璃片为例,在厚度为 t 的玻璃片上滴一滴水,从水滴的上方观察位于玻璃片下方物体所成的像. 将玻璃片-水滴复合体系看作共轴光具组,采用逐面成像法分析物点的位置,计算其放大倍数. 光在水滴内传播的光路情况(侧视图)如图 4 所示,定义 O 为椭圆中心,C 为椭圆顶点, n' 为空气的折射率, n 为水的折射率, n_1 为玻璃片的折射率,待观测物体位于 W_1 点.

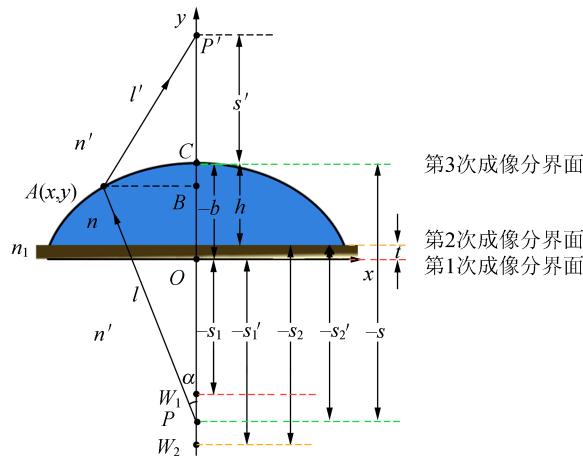


图 4 光在水滴内传播的光路情况(侧视图)

光在水滴内传播的过程存在 3 次成像:

1) 在空气与玻璃片分界面处的第 1 次平面折射成像: 物空间为空气, 像空间为玻璃, 物点为 W_1 , 成像点为 W_2 , s_1 为物距, s_1' 为像距, r 为成像面的半径.

$$\frac{n_1}{s_1} - \frac{n'}{s_1} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_1 - n'}{r} = 0, \quad (7)$$

$$n_1 s_1 = n' s_1'. \quad (8)$$

2) 在玻璃片与水滴分界面处的第 2 次平面折射成像: 物空间为玻璃, 像空间为水, 以第 1 次成像的像点 W_2 作为物点, 成像点为 P , s_2 为物距, s_2' 为像距.

$$\frac{n}{s_2} - \frac{n_1}{s_2} = 0, \quad (9)$$

$$s_1' - t = s_2. \quad (10)$$

3) 在水滴与空气分界面处的第 3 次椭球面成像: 物空间为水, 像空间为空气, 以第 2 次成像的

像点 P 作为物点, 光线从 P 点入射, 与几何轮廓相交于点 $A(x, y)$, 经过水滴放大镜的会聚作用, 出射到 P' 点, α 为入射光线与 y 轴的夹角, s 为物距, s' 为像距. 为满足光学符号法则, 需注意以下式子中 $b < 0$, 而后根据费马原理进行如下分析.

水滴侧视图呈椭圆形, 设水滴轮廓的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (11)$$

光线传播的光程 $\delta = nl + n'l'$, 根据勾股定理和费马原理可得:

$$\frac{n}{l} \left[-s + y + b - \frac{a^2}{b^2} y \right] + \frac{n'}{l'} \left[-s' + y + b - \frac{a^2}{b^2} y \right] = 0. \quad (12)$$

由式(12)可知, 像点位置不仅与物点位置有关, 而且与入射光线和椭球面的交点位置有关, 所以单心入射光束经旋转椭球面折射后不再保持单心性, 成像质量降低, 这也是球差的具体体现.

当通过水滴的光线满足近轴条件时^[12], 具有以下极限关系: $l \rightarrow -s$, $l' \rightarrow s'$, $y \rightarrow -b$, 可简化得到旋转椭球面的物像公式为

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = (n' - n) \frac{b}{a^2} = \Phi, \quad (13)$$

$$s = s_2' - h, \quad (14)$$

其中, Φ 为光焦度. 根据光学的基本定义^[11], 可以计算物方焦距 f 、像方焦距 f' 和放大倍数 M 为

$$f = -\frac{n}{n' - n} \frac{a^2}{b} = -\frac{n}{\Phi}, \quad (15)$$

$$f' = \frac{n'}{n' - n} \frac{a^2}{b} = \frac{n'}{\Phi}, \quad (16)$$

$$M = \left| \frac{y'}{y} \right| = \left| \frac{ns'}{n's} \right| = \left| \frac{ns}{ns' + \Phi ss'} \right| = \left| \frac{1}{\frac{s}{f} - 1} \right| = \left| \frac{1}{-\frac{n's}{nf'} - 1} \right|. \quad (17)$$

综上分析可知, 如果入射光线不是近轴光线, 那么不存在确定的焦点; 当入射光线是近轴光线时, 存在确定的焦点.

2 平行光经水滴放大镜后的光路模拟

为验证单心性分析的正确性且具象化球差对成像的影响, 使用 Algodoo 做光学仿真模拟^[13].

针对亲水/疏水性玻璃片上的椭圆水滴($a = 0.60 \text{ cm}$, $b = 0.15 \text{ cm}$), 模拟波长为 620 nm 平行入射光经水滴放大镜后的出射光路. 如图 5(a)和

图 5(b)所示,全宽度平行光入射水滴时,无法观察到确定的像方焦点;如图 5(c)和图 5(d)所示,近轴平行光入射水滴时,出射光线存在清晰而且准确的像方焦点,与理论分析一致。这是由于球差是影响成像效果的重要因素,因为透镜边缘部分的折射能力比中心部分强,光线经过边缘区域

后会更快地会聚,而经过中心区域后会聚得较慢。不同的折射能力导致平行入射光无法在同一焦点上会聚,产生球差,导致成像模糊、分辨率降低以及对比度下降。因此,为避免球差对成像效果的影响,将近轴光线入射下的放大倍数作为本研究的主要内容。

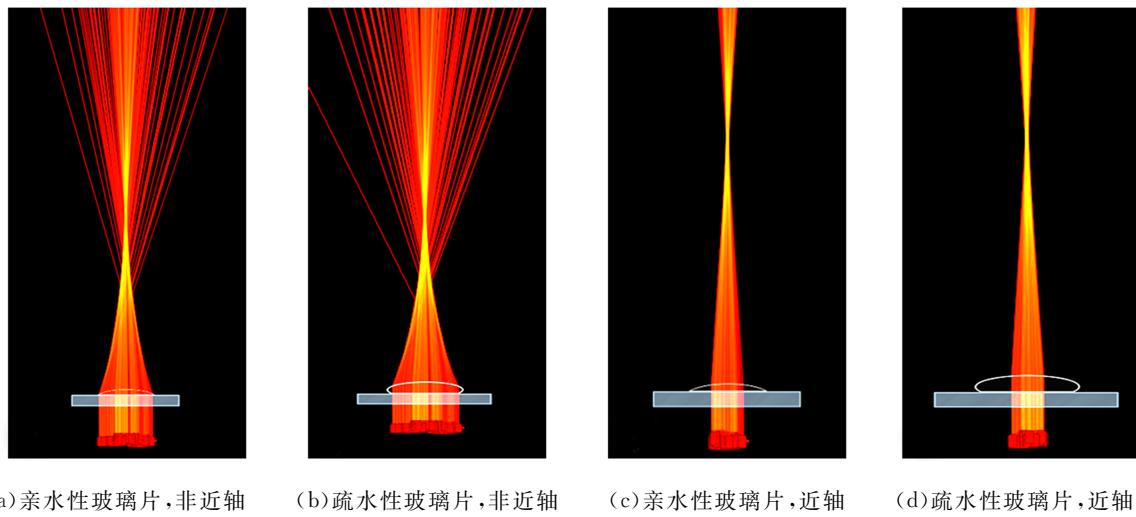


图 5 平行光入射的模拟光路

3 实验探究

基于理论分析,设计实验方案探究水滴体积、玻璃亲水/疏水性质和物距对放大倍数的影响。

3.1 实验器材

- 1) 移液枪,可调控液体的体积为 $20\sim200\ \mu\text{L}$;
- 2) 亲水/疏水性薄玻璃片,厚度为 $0.55\ \text{mm}$;
- 3) 升降台;
- 4) 游标卡尺,精度为 $0.05\ \text{mm}$;
- 5) 激光光源,波长为 $650\ \text{nm}$;
- 6) 方格纸,尺寸为 $20\ \text{cm}\times30\ \text{cm}$,作为待观察物体。

用无水乙醇(体积分数为 75%)、异丙醇和去离子水清洗玻璃片,尽可能保证较高的洁净程度,使水滴在玻璃片上自然扩散。

3.2 水滴放大镜的焦距

使用移液枪将不同体积的水滴滴在亲水/疏水性玻璃片上,利用照相机记录其光学图像,导入 Origin 和 imagej 软件中,分别进行椭圆拟合和接触角测量,如图 6~7 所示。由图 6 可见,椭圆拟合度很好。利用式(16)可以实现像方焦距的理论值计算。

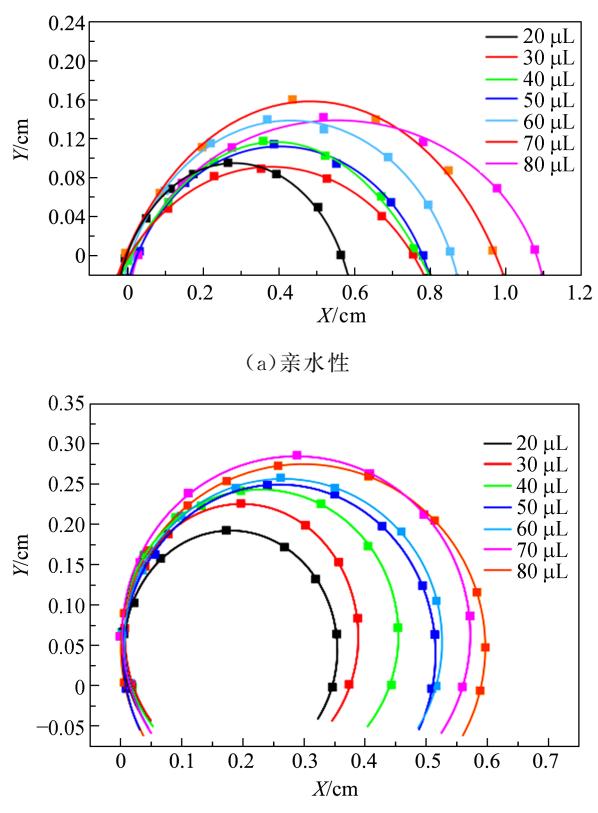
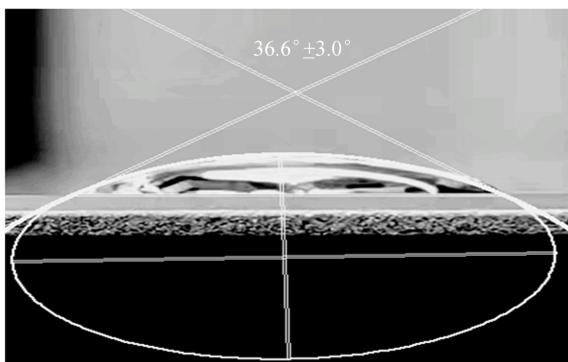
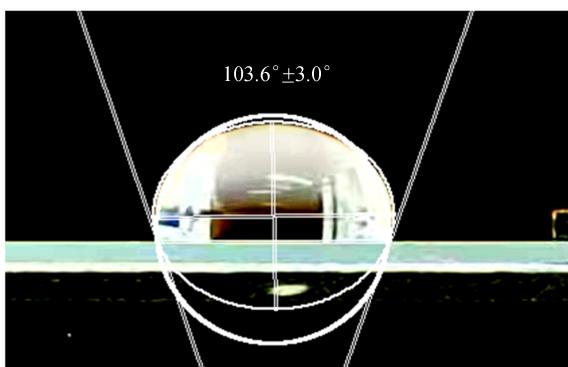


图 6 对亲水/疏水性玻璃片上水滴的侧面轮廓描点拟合



(a)亲水性



(b)疏水性

图7 对亲水/疏水性玻璃片上水滴的接触角测量

激光光源近似满足近轴平行光入射的条件,光照射到水滴放大镜上,在水滴放大镜另一侧的光屏上可观察到光束会聚,此时的光屏位置近似为像方焦点的位置,故水滴到光屏的距离即为像方焦距的实验值。图8给出了不同体积的水滴放大镜在亲水/疏水性玻璃片上,焦距的实验值与理论值的比较,结果表明:随水滴体积增大,像方焦距增大,而且在误差允许范围内,理论值与实验值相符合。

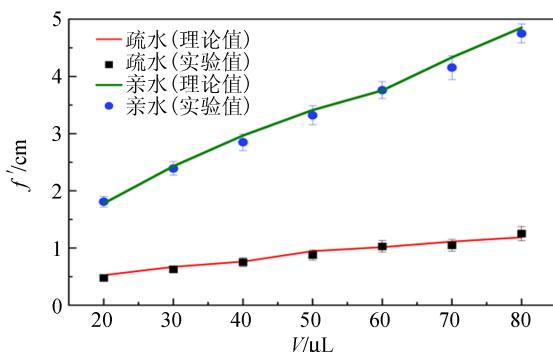


图8 像方焦距随水滴体积的变化

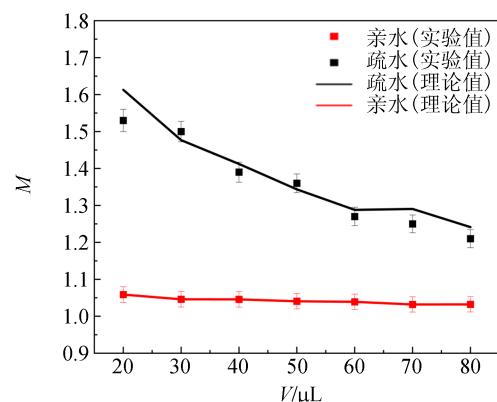
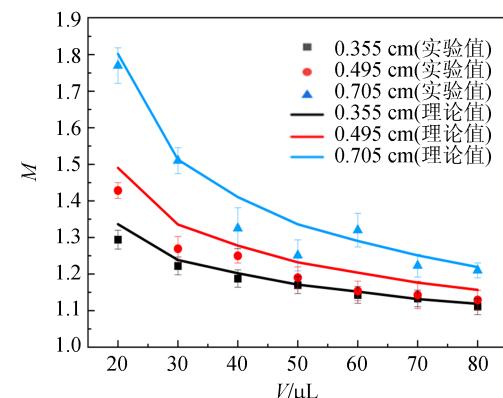
3.3 水滴放大镜放大倍数的影响因素

利用移液枪控制水滴的体积,通过升降台调整物距,通过改变玻璃片的材质调控亲水/疏水性质,分别研究一定范围内,水滴体积、亲水/疏水性质和物距对水滴放大镜放大倍数的影响。

再次使用照相机观察坐标纸经水滴放大镜所成的像,拍摄其光学图像,导入Origin软件,并利用其像素分析功能,分析放大区域与未放大区域的像素,得到水滴放大镜放大倍数的实验值,利用式(17)计算水滴放大镜放大倍数的理论值。

不同玻璃片材质、不同物距时放大倍数随液滴体积的变化如图9所示。由图9可知:

- 1) 在物距和玻璃片材质均不变的情况下,随水滴体积增大,放大倍数减小;
- 2) 在水滴体积和物距均不变的情况下,疏水性玻璃片上的水滴具有更大的放大倍数;
- 3) 在水滴体积和玻璃片材质均不变的情况下,在1倍焦距以内,随物距增大,放大倍数增大。

(a)不同玻璃片材质, $-s_1 = 0$ 

(b)亲水性玻璃片,不同物距

图9 水滴放大镜放大倍数的影响因素(实验分析)

以上实验结果表明:在 1 倍焦距范围内,放大倍数与水滴体积成负相关,与物距成正相关,疏水性玻璃片上水滴的放大倍数更大。然而,对比理论值与实验值发现,二者在个别情况下存在较大差异,这可能是由于以下原因造成的实验误差:

1) 实验时人为操作的不准确性,例如使用移液枪时易出现水滴不完全旋转对称或产生畸变;

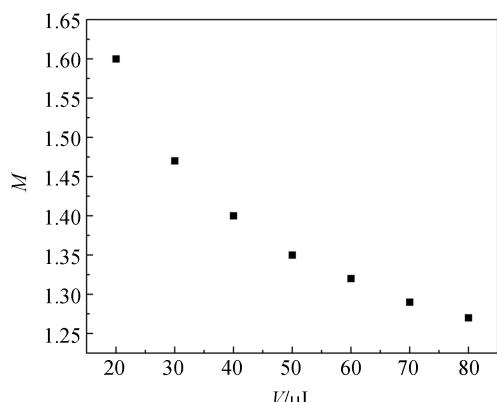
2) 利用 Origin 和 imagej 对水滴形状进行椭圆拟合和接触角测量过程中,存在视差。

同时从理论上进行分析,通过式(2)~(6)对几何参量(如 a, b)进行计算,再利用式(15)~(17)分析水滴体积、亲水/疏水性质和物距对放大倍数的影响,如图 10 所示。由图 10 可见:

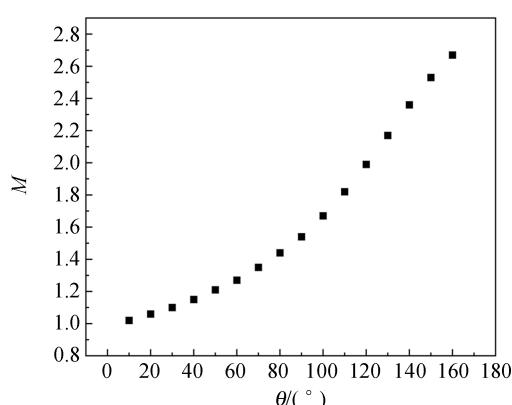
1) $-s_1 = 0.30 \text{ cm}, \theta = 60^\circ$ 时,随着 V 的增大, M 减小;

2) $-s_1 = 0.30 \text{ cm}, V = 80 \mu\text{L}$ 时,随着玻璃片的疏水性不断增强, θ 逐渐增大, M 随之增大;

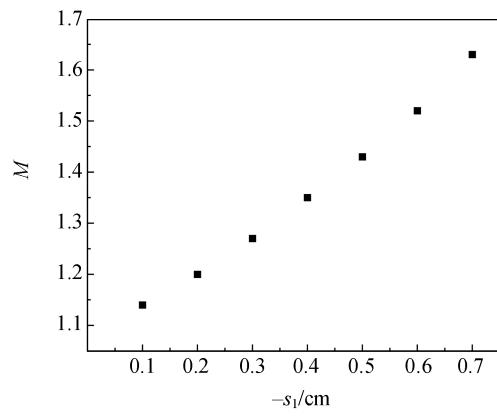
3) $V = 80 \mu\text{L}, \theta = 60^\circ$ 时,在 1 倍焦距以内,随着 $-s_1$ 增大, M 增大。



(a) $-s_1 = 0.30 \text{ cm}, \theta = 60^\circ$



(b) $-s_1 = 0.30 \text{ cm}, V = 80 \mu\text{L}$



(c) $V = 80 \mu\text{L}, \theta = 60^\circ$

图 10 水滴放大镜放大倍数的影响因素(理论计算)

上述理论研究结果表明:在 1 倍焦距范围内, M 与 V 成负相关,与 $-s_1$ 成正相关,而且疏水性玻璃片上水滴的 M 更大。理论结论与实验结果相契合。

4 结束语

本文建立了水滴透镜的理论分析模型,推导了近轴条件下透镜焦距与放大倍数的量化关系。通过理论计算与实验验证相结合的方法,研究了液滴体积、表面浸润性以及物距参量对放大性能的调控规律。实验结果表明:三者对成像放大倍数存在差异化的影响机制,据此可以实现多参量协同调控的水滴透镜设计。针对液滴蒸发对其光学性能的影响问题,可以利用 PDMS 固化技术或使用高比热液体等方法克服。受限于球面像差效应,本文未能对非近轴区域的成像特性展开深入分析。

参考文献:

- [1] DANG Q, SONG M J, LUO X Y, et al. A modeling study of different kinds of sessile droplets on the horizontal surface with surface wettability and gravity effects considered [J]. Energy Storage and Saving, 2022, 1(1): 22-32.
- [2] YU Y, LV C J, WANG L F, et al. The shape of heavy droplets on superhydrophobic surfaces [J]. ACS Omega, 2020, 5(41): 26732-26737.
- [3] WANG X W, YU Y. Analysis of the shape of heavy droplets on flat and spherical surface [J]. Science China: Physics, Mechanics & Astronomy, 2012, 55(6): 1118-1124.

- [4] GALSTIAN T, SOVA O, ASATRYAN K, et al. Optical camera with liquid crystal autofocus lens [J]. Optics Express, 2017, 25(24):29945-29964.
- [5] CHEN H S, WANG Y J, CHEN P J, et al. Electrically adjustable location of a projected image in augmented reality via a liquid-crystal lens [J]. Optics Express, 2015, 23(22):28154-28162.
- [6] KUANG F L, YUAN R Y, WANG Q H, et al. Large zooming range adaptive microscope employing tunable objective and eyepiece [J]. Scientific Reports, 2020, 10(1):14644.
- [7] LI L, XIAO L, WANG J H, et al. Movable electrowetting optofluidic lens for optical axial scanning in microscopy [J]. Opto-Electronic Advances, 2019, 2(2):180025.
- [8] 孔梅梅,潘世成,袁东,等. 方腔结构的非球面液体透镜的设计与分析[J]. 激光与光电子学进展, 2023, 60(21):2122005.
- [9] 赵瑞,彭超,张凯,等. 介电润湿液体透镜仿生复眼的设计与仿真[J]. 光电工程, 2021, 48(2):0200120.
- [10] 黄邵祺,张亚兵,潘明亮,等. 基于液滴透镜的手持式显微成像系统的研制[J]. 光学仪器, 2021, 43(2):72-78.
- [11] 姚启钧. 光学教程[M]. 北京:高等教育出版社, 2002:148.
- [12] 郑世旺,袁秀玲. 光在扁旋转椭球面上的成像研究[J]. 河南大学学报(自然科学版), 2000, 30(3):17-19.
- [13] GREGORCIC B, BODIN M. Algodoo: A tool for encouraging creativity in physics teaching and learning [J]. Physics Teacher, 2017, 55(1): 25-28.

Magnification of water droplet magnifier under paraxial conditions

ZHANG Yanchao^a, WANG Xuejing^a, SUN Chunfang^{a,b}, JIA Yan^{a,b}, WANG Shuaik^a, CHEN Yutong^a, LIU Fan^a, ZHAO Zishan^a, ZHANG Yushuang^a, DAI Rui^{a,b}

(a. School of Physics; b. National Demonstration Center for Experimental Physics Education (Northeast Normal University), Northeast Normal University, Changchun 130024, China)

Abstract: A geometric model of a rotating ellipsoid for water droplets on hydrophilic or hydrophobic glass surfaces was established, the quantitative relationship between their geometric shape, water droplet volume and the hydrophilic or hydrophobic properties of the glass was revealed. Based on Fermat's principle, the object-image formula and the method for calculating magnification under paraxial conditions were derived. The dependence of magnification of water droplets on the object distance, water droplet volume and hydrophilic or hydrophobic properties of glass pieces was researched. The results showed that, based on the mathematical analysis of water droplet shape, the imaging effect could be accurately regulated by adjusting the object distance, water droplet volume and hydrophilic or hydrophobic properties of glass pieces.

Key words: water droplet lens; magnification; water droplet volume; hydrophilic or hydrophobic properties; object-image formula

[编辑:任德香]