

文章编号:1005-4642(2025)06-0047-06

基于第一性原理透镜模拟仿真及其教学应用

贾小文, 范海英, 尹 霖

(陆军军事交通学院 基础部, 天津 300161)

摘要:透镜焦距的测量、显微镜望远镜组装、分光计、光栅衍射、棱镜衍射、光杠杆法杨氏模量测定、密立根油滴实验、牛顿环等实验均涉及到透镜的使用。教学中所用透镜大多数被看作理想透镜,但真实透镜有一定厚度、存在像差、基点和基面不重合、光线偏离近轴条件等,这使得测量结果与理想结果存在偏差。利用仿真技术则可以直观展示这些因素对透镜成像的影响。基于第一性原理,从光学定律出发,利用数值算法对透镜成像进行了仿真研究,模拟了透镜成像过程。利用模拟仿真的方法研究了非理想透镜的基点、基面等参数对透镜测量的影响,验证了透镜成像中的费马原理,研究了像差和离轴光线对成像效果的影响,结合仿真结果讨论了透镜焦距测量中遇到的问题和注意事项。

关键词:透镜;像差;第一性原理

中图分类号:O4-39;O435

文献标识码:A

DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2025.06.007

透镜是重要的光学元件,对透镜的研究和使用是大学物理实验的重要内容。透镜焦距的测量、显微镜望远镜组装、分光计、光栅衍射、棱镜衍射、光杠杆法杨氏模量测定、密立根油滴实验、牛顿环等实验均涉及到透镜的使用。教学中所用透镜大多数被看作理想透镜,但是真实透镜和理想透镜有一定差别,例如有一定厚度、存在像差、基点和基面不重合、光线偏离近轴条件等,这使得测量结果与理想结果存在偏差。理解这些因素对透镜成像的影响对于熟练掌握光学仪器的使用较为重要。

实践中,这些因素的表现往往较为复杂,单纯靠理论或实验分析比较困难,利用仿真技术则可以直观形象地进行展示,为理论和实验提供指导^[1-4]。2024 年全国大学物理实验竞赛命题类第 5 题、自选类第 2 题都提到通过仿真模拟的方式对关键物理过程进行展示,反映了物理实验教学领域对虚拟仿真实验技术的重视。

本文基于第一性原理,从光学定律出发,利用数值算法对透镜成像进行了仿真研究,模拟了透镜成像过程,并利用模拟仿真的方法研究了非理想透镜的基点、基面等参数对透镜测量的影响,验证了透镜成像中的费马原理,研究了像差和离轴

光线对成像效果的影响,结合仿真结果讨论了其在透镜焦距测量实验教学中的应用。

1 数值模拟仿真算法

透镜的模拟仿真算法包括光的折射、透镜模型和光学成像仿真。

1.1 光的折射仿真

折射光路如图 1 所示,设分界面入射点处法线矢量为 $\mathbf{n}$,入射光线矢量为 $\mathbf{r}$,折射光线矢量为 $\mathbf{r}'$,入射角为 i ,折射角为 i' 。根据光的折射定律,法线、入射光线和折射光线处于同一平面内,因此可以将 $\mathbf{r}'$ 写为 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{r}$ 的线性组合:

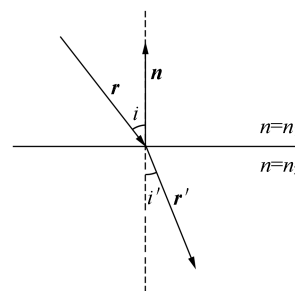


图 1 光线折射光路图

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \lambda \mathbf{n}, \quad (1)$$

收稿日期:2024-10-26;修改日期:2024-12-14

作者简介:贾小文(1983—),男,陕西神木人,陆军军事交通学院基础部副教授,博士,从事大学物理实验教学。E-mail: 2002ji Xiaowen@163.com

其中, λ 为待定参数, 可以通过折射定律求得. 根据矢量运算规则:

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{n}| = r n \sin i, \quad (2)$$

式中, $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$ 表示 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{n}$ 的外积, $|\mathbf{r} \times \mathbf{n}|$ 表示该外积的模, r 表示 $\mathbf{r}$ 的模, n 表示 $\mathbf{n}$ 的模. 结合式(1)和式(2)可得:

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{n} = (\mathbf{r} + \lambda \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{n} + \lambda \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{n}, \quad (3)$$

于是

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{n}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{n}| = r n \sin i = r' n \sin i', \quad (4)$$

从而有

$$r \sin i = r' \sin i', \quad (5)$$

由折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (6)$$

于是

$$r = \frac{n_1}{n_2} r', \quad (7)$$

实际中, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 已知, 由 $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, $r'^2 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'$, 式(7)整理为

$$\lambda^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) + 2\lambda (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) = 0. \quad (8)$$

式(8)是关于 λ 的二次方程, 有 2 个根, 符号相反, 记为 λ_+ 和 λ_- . 若入射方向与法线方向相反(内积取值为负), 取负根, 即

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \lambda_- \mathbf{n}, \quad (9)$$

反之取正根, 即

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \lambda_+ \mathbf{n}, \quad (10)$$

若考虑垂直入射和折射率相等这 2 种特殊情况, 则折射光线矢量与入射光线矢量相等即可.

1.2 透镜模型仿真

设透镜曲面为球面, 光线经过透镜折射如图 2 所示. 光源 S 发出光束 $\mathbf{r}$, 与透镜左侧球面 Σ_1 交于 P_1 点, 入射角为 i_1 , 经 Σ_1 折射后(折射角为 i_1')与右侧球面 Σ_2 交于 P_2 点, 入射角为 i_2' , 再经 Σ_2 折射后成为像方光线, 出射角为 i_2 . 为了求出折射光线, 需要知道入射光线与透镜球面交点处法线方向. 以 Σ_1 为例, 交点 P_1 处法线矢量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{O}_1 \mathbf{P}_1. \quad (11)$$

$\mathbf{O}_1$ 已知, 计算 $\mathbf{n}$ 需求出 P_1 . 设 $\mathbf{S} = (x_s, y_s, z_s)$, $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$, 则:

$$\mathbf{O} \mathbf{P}_1 = \mathbf{O} \mathbf{S} + \lambda \mathbf{r}, \quad (12)$$

λ 为待定参数. Σ_1 曲面方程为

$$|\mathbf{O}_1 \mathbf{P}| = r_1, \quad (13)$$

由于 P_1 在 Σ_1 上, 因此

$$|\mathbf{O}_1 \mathbf{P}_1| = |\mathbf{O} \mathbf{P}_1 - \mathbf{O} \mathbf{O}_1| = r_1, \quad (14)$$

即

$$|\mathbf{O} \mathbf{S} + \lambda \mathbf{r} - \mathbf{O} \mathbf{O}_1| = |\mathbf{O}_1 \mathbf{S} + \lambda \mathbf{r}| = r_1, \quad (15)$$

于是

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \lambda^2 + 2\lambda (\mathbf{O}_1 \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{O}_1 \mathbf{S} \cdot \mathbf{O}_1 \mathbf{S} - r_1^2 = 0. \quad (16)$$

$\mathbf{r}$ 为入射光线方向矢量(已知), $\mathbf{O}_1 \mathbf{S}$ 即 Σ_1 圆心到光源的矢量(已知), 因此式(16)也是关于 λ 的一元二次方程, 方程有 2 个根. 因为光线从左边入射, 因此结果应该为正, 故方程两根若异号, 则结果取正根, 若同号(此时两根都为正), 取绝对值较小的根. 得到 P_1 , 就可以得到该点处的法线方向矢量 $\mathbf{n}$, 利用 1.1 介绍算法就可以得到折射以后的光线方向矢量. 将折射以后的光线当作新的光线, P_1 当作新的光源, 按照同样的计算过程可计算经 Σ_2 折射后的光线.

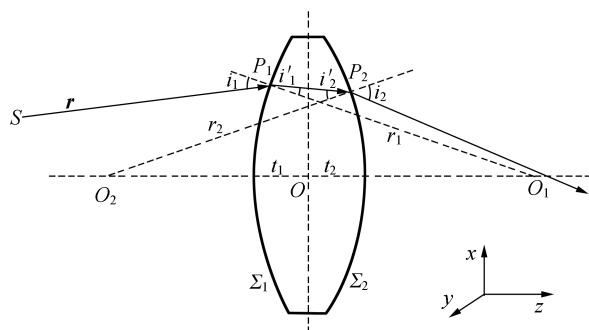


图 2 透镜模型和仿真光路图

1.3 光学成像仿真

像平面用空间平面表示, 计算透镜折射光线与像平面的交点. 像平面各点对应网格矩阵, 初始取值为 0, 每当有光线交于某一网格点, 则该点数值加 1(假设光强没有衰减). 每个物点发出的光线数目完全一样(并限于透镜大小决定的光阑内), 当这些光线到达像平面时, 对应交点处累加数值就可以表示物镜透镜成像后在像平面上的光强分布.

建立直角坐标系, 空间直线用矢量 $\mathbf{R}$ 和直线经过的点 $\mathbf{P}$ 确定, $\mathbf{R}$ 即光线传输方向, $\mathbf{P}$ 为光源位置:

$$\mathbf{R}=(R_x, R_y, R_z), \quad (17)$$

$$\mathbf{P}=(P_x, P_y, P_z), \quad (18)$$

则空间直线可表示为

$$\frac{x-P_x}{R_x}=\frac{y-P_y}{R_y}=\frac{z-P_z}{R_z}. \quad (19)$$

设像平面所在空间平面法向矢量为 $\mathbf{N}=(A, B, C)$, 则空间平面可表示为

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (20)$$

则交点 $\mathbf{P}'$ 可表示为

$$\mathbf{OP}'=\lambda\mathbf{R}+\mathbf{OP}, \quad (21)$$

其中

$$\lambda=\frac{-D-\mathbf{N}\cdot\mathbf{OP}}{\mathbf{N}\cdot\mathbf{R}}. \quad (22)$$

2 数值仿真模拟研究

2.1 薄透镜的数值仿真模拟

设透镜参数 $r_1=r_2=10$ cm, 厚度 $t=0.4$ cm, 所使用光学材料折射率为 1.5, 两侧为空气(折射率为 1), 物大小约为 2 cm, 光线为傍轴光线(入射角小于 2°). 图 3 给出了此透镜数值模拟仿真的成像结果.

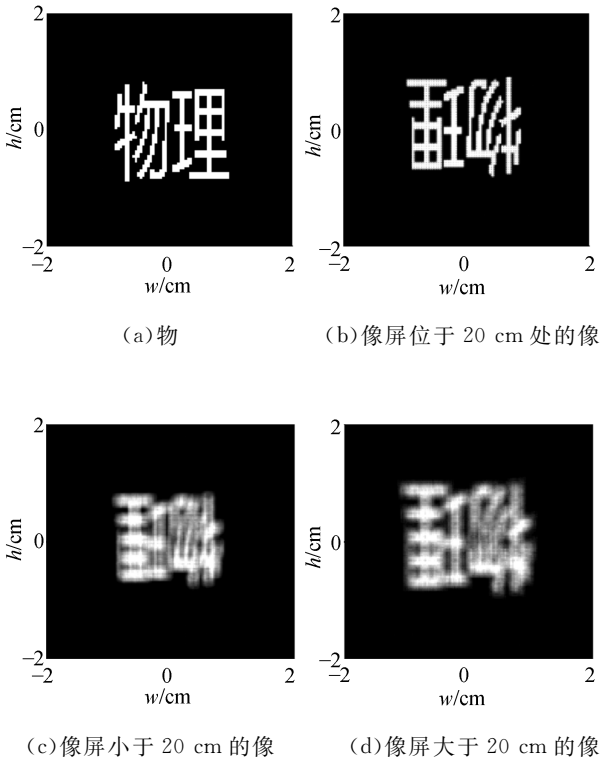


图3 薄凸透镜成像数值仿真结果

仿真通过 Igor Pro 软件进行^[5]. 由于透镜厚度较小(远小于透镜球面半径), 可以看作理想透

镜, 焦距 $f=10$ cm, 当物处于 20 cm 处时, 根据透镜成像理论, 应该在 20 cm 处成倒立等大的实像; 当像屏处于 20 cm 处时可以看到清晰的实像; 在小于或者大于 20 cm 处时, 都不能成清晰的像. 仿真结果与实际情况相符, 验证了本文仿真算法的可靠性.

2.2 厚透镜的数值模拟仿真

对于厚透镜, 光心和透镜主面一般不重合, 其焦距大小也与入射光线偏离光轴的程度有关. 设透镜参数为 $r_1=15$ cm, $r_2=-10$ cm(为了计算方便, 对透镜球面的半径做了符号规定), 透镜厚度 $t=2$ cm, 透镜折射率为 1.5, 两侧为空气, 如图 4 所示. 此时透镜为非理想透镜, 但对于近轴光线仍然可以当作理想透镜, 根据光学理论, 物方焦距和像方焦距大小相等, 满足如下关系^[6-7]:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{(n-1)t}{nr_1r_2}\right], \quad (23)$$

像方主面到透镜右侧球面的距离为

$$d_1=-\frac{(n-1)ft}{nr_1}, \quad (24)$$

物方主面到透镜左侧球面的距离为

$$d_2=-\frac{(n-1)ft}{nr_2}, \quad (25)$$

计算得 $f=12.329$ cm, $d_1=-0.548$ cm, $d_2=0.822$ cm, 即像方主面 H' 在透镜右侧球面的左侧, 物方主面 H 在透镜左侧球面的右侧.

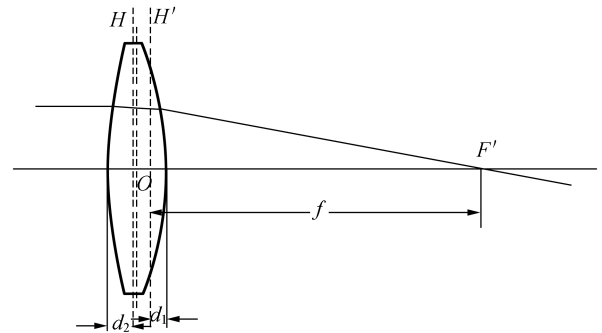
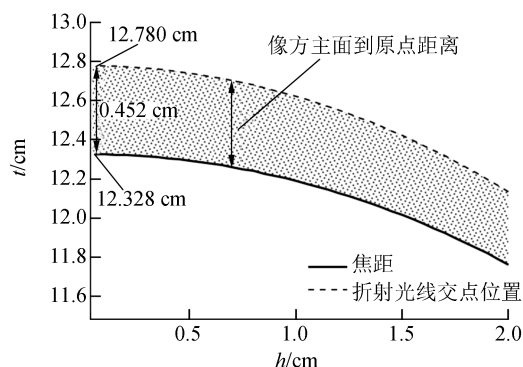
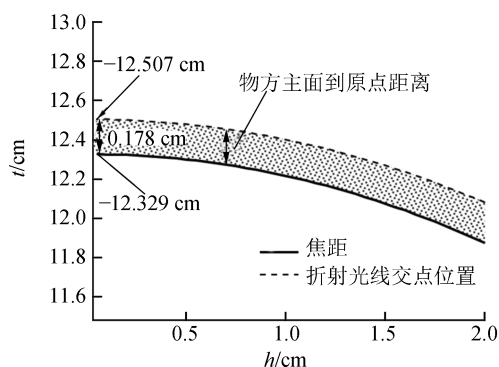


图4 厚透镜光学参数示意图

图 5 为对厚透镜焦距和主面位置的仿真结果. 仿真时, 透镜光心位于坐标原点, 透镜 2 个球面与光轴交点分别为 -1 cm 和 1 cm(厚度为 2 cm). 按照透镜基点、基面的定义, 平行于光轴的光线经透镜折射后, 与光轴交点即为焦点位置, 其反向延长线与入射平行光交点即为主面所在位置, 焦点与主面之间的距离即为焦距大小.



(a) 像方主面随入射平行光线偏离光轴关系



(b) 物方主面随入射平行光线偏离光轴关系

图5 透镜基点基面的数值仿真模拟

从图5可以看出,焦点位置与入射平行光线偏离光轴的距离有关。当距离光轴较远时,焦点位置偏小,随着 h 减小,焦点位置逐渐增大;当 h 趋于0时(此时满足傍轴条件),焦点位置就是理想透镜对应焦点,相应的反向延长线与入射光线的交点位置就是理想透镜主面。仿真显示:此厚透镜近轴光线焦距为12.328 cm,与理论值吻合。近轴光线像方主面到原点距离为0.452 cm,主面到透镜右侧球面的距离为 $d_1=0.548$ cm,近轴光线物方主面到原点距离为0.178 cm,主面到透镜左侧球面的距离为 $d_2=0.822$ cm,同样与理论值吻合。从仿真结果可看出,厚透镜的焦距是变化的量,光线距离光轴越远,其值越小,只有当光线充分满足傍轴条件时,焦距测量值才是理想透镜对应的焦距值。

根据费马原理,物点发出的光线在像平面会聚时,物点到对应像点的所有光线的光程相等。图6给出光线经过图4所示厚透镜折射后的实际光程计算结果。可以看到只有当入射光线张角较小时,光线才满足等光程原理,此时所有光线都会

聚于像点。当入射张角较大时,光程将逐渐偏大,折射光线将不再会聚于同一点。当然图6纵坐标范围很小,即使孔径较大,光程偏离最小值也不大,因此即使孔径稍大,也能够基本成清晰像。

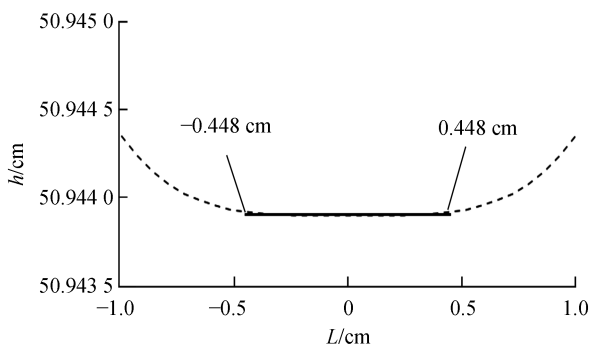
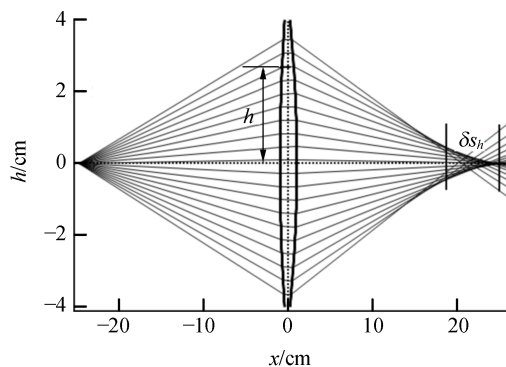


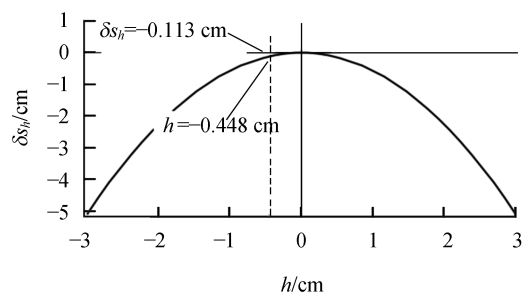
图6 费马原理的数值仿真实验

2.3 像差的模拟研究

从2.2节的仿真结果可以看到,光线偏离傍轴条件时,焦距值会发生变化,这正是像差产生的原因。图7给出了物点在光轴上透镜的球面像差数值仿真结果(仍然使用上节透镜参数)。



(a) 透镜球差示意图



(b) 球差随入射光线偏离光轴距离的变化

图7 球差数值仿真结果

可以看到,当入射光线偏离透镜中心距离较大时,折射光线会聚点向左移动,这就是球面像差,球面像差为负值.图 7 还给出了图 6 等光程临界点处入射光线高度处对应的球面像差,其大小并不为 0,可见对于非理想透镜,球面像差只有在入射光线趋于光轴时才为 0.当然,在实际中考虑成像设备或者人眼的分辨能力,只要像差被限定在一定范围,即入射光线只要限定在傍轴一定角度即可.

图 8 为彗形像差的数值仿真结果,其中物体位于物方二倍焦点处(即位置为 -24.834 cm)的光点,距离光轴分别为 $0, 3, 6, 9\text{ cm}$,像平面位于像方二倍焦点(即位置为 25.109 cm).随着物体偏离光轴距离的增大,像光点不再聚焦于一点,而是逐渐变得弥散,呈彗星形状分布(由于还有球差等其他像差因素的影响,成像结果本质上是所有像差的综合表现),与理论分析一致.

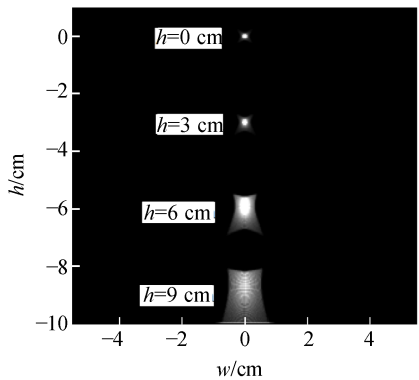


图 8 彗形像差的数值仿真模拟

3 仿真研究在教学中的应用

透镜焦距测量实验是大学物理实验中的基础实验,本文以其为例介绍第一性原理仿真的应用.实验要求学生自行设计实验方案,测量薄透镜的焦距值.表 1~2 给出了实验中薄凸透镜焦距测量的结果.从表 1~2 中可以看到,透镜焦距的测量数据并不是恒定值(实验所用透镜标称值为 100 mm),而是随测量条件变化而变化:采用自准直法时透镜焦距测量随光阑(物)增大而减小,采用物像距法时焦距测量值随物距 u 增大而增大(小像法非常明显);当物大小一致时,自准直法焦距测量值比物像距法小,物像距法使用大像法测量焦距值比小像法测量值小.

表 1 凸透镜自准直法测量数据

光阑孔径/mm	f/mm
5.0	96.2
10.0	95.5
15.0	94.6
20.0	92.8
物*	94.8

注:物*表示物光屏上“三叶草”形状通光孔,实验中作为透镜的“物”,大小为 15.0 mm .

表 2 物像距法测量数据

方法	u/mm	v/mm	f/mm
大像法	110.0	750.0	95.9
	111.0	709.0	96.0
	111.5	668.5	95.6
	112.5	627.5	95.4
	114.0	586.0	95.4
	116.5	543.5	95.9
	117.5	502.5	95.2
	120.5	459.5	95.5
	123.5	416.5	95.3
	130.0	370.0	96.2
小像法	368.6	131.4	96.9
	414.0	126.0	96.6
	457.5	122.5	96.6
	500.0	120.0	96.8
	542.0	118.0	96.9
	584.0	116.0	96.8
	625.5	114.5	96.8
	666.5	113.5	97.0
	707.5	112.5	97.1
	748.0	112.0	97.4

从 2.2 节厚透镜焦距模拟仿真和 2.3 节像差模拟仿真可知,实际透镜焦距大小与入射光线的孔径有关,孔径越大,其焦距值越小.在本实验中,物距越大,物对透镜所张的孔径角越小,因此焦距值越大;对于相同的物像距,小像法对应较大物距,孔径较小,因此要比大像法测量的焦距值大;当采用自准直法时,物在焦平面位置,其孔径角显然大于相同条件下物像距法的孔径角,因此测量焦距偏小.

以上分析表明,测量透镜的焦距时,为了减小像差的影响,应该尽可能用较大的物距测量,即傍轴条件满足越好,测量焦点越接近理想条件下的焦点.

教学中,在预习阶段将此仿真程序发给学生,可显著提升学生预习效果. 教学实践结果表明,提前开展透镜成像的仿真预习,可显著提高学生的实验效率和实验方案设计质量,如很少出现光学元件布局拥挤的情况. 此外,实验中能主动采用大物距测量焦距(满足透镜焦距定义条件),并有助于学生正确理解焦距随实验条件变化而变化的情况. 图 9 是仿真软件(Igor Pro)及程序示意图.

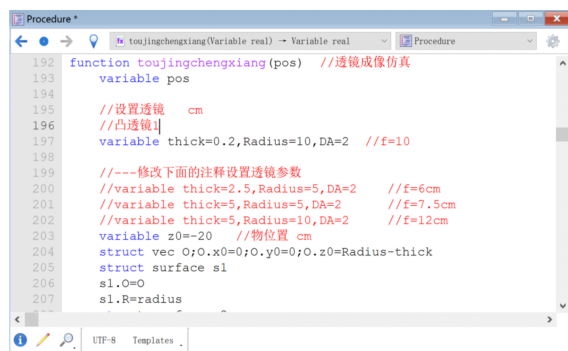


图 9 仿真软件及对应程序

本文仿真结果还可在完成实验后提供给学生,用于进一步深入分析实验数据. 根据 2.2 节仿真结果可知,透镜由于有一定厚度,主面和透镜光心并不重合,而实验中测量得到的物距是物位置到透镜光心的距离,像距是像位置到透镜光心的距离,因此物距和像距都比实际值偏大. 若待测焦距为焦点到主面距离(即理想透镜焦距定义),则直接利用物像距法公式测量得到的焦距值比实际值偏大. 设透镜为对称球面透镜,物方主面和像方主面到光心的距离相等,且都为 t ,真实焦距为 f ,物距为 u ,像距为 v ,容易得到 v 和 u 满足下列关系:

$$v = \frac{f(u-t)}{u-f-t} + t. \quad (23)$$

利用式(23)对表 2 中小像数据进行拟合,拟合结果如图 10 所示,拟合焦距 $f=95.1 \text{ mm}$,主面到光心距离 $t=2.5 \text{ mm}$. 可见对于表 1 所用透镜,主面并非与光心重合,此时焦点到光心的距离大于焦距值,拟合焦距值小于测量焦距值(未考虑透镜厚度),这与表 1 测量数据一致. 若透镜焦距的标称值为焦点到透镜光心的距离,则实验中透镜焦距应为 $f+t=97.6 \text{ mm}$.

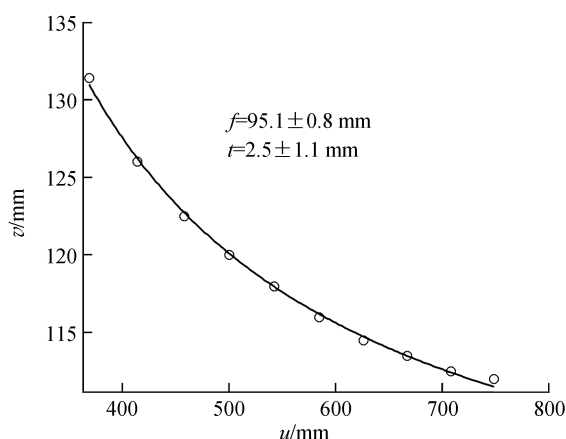


图 10 拟合物像距求透镜焦距

4 结束语

本文利用第一性原理数值模拟仿真透镜成像,计算了厚透镜的光学参数,研究了厚透镜和光线偏离傍轴条件时像差大小及其对成像效果的影响. 另外,本文还讨论了仿真结果在透镜焦距测量实验中的应用,给出了实验中应注意的问题. 与传统的仿真技术相比,本文真实模拟了光在透镜中折射时的物理行为,在一定程度上可以复原较为真实的物理过程. 与目前较为成熟的 Zemax 等工业化光学软件模拟相比较,本文从教学角度清晰地展示了透镜成像的详细过程,给出了解决此类问题的基本思路和一般过程. 本文提出的方法有利于教师和学生利用 IgorPro, Matlab 和 Python 等数据处理软件开展透镜成像等光学方面的虚拟仿真研究,在教学上具有一定的应用价值.

参考文献:

- [1] 赵凯华. 光学[M]. 北京:高等教育出版社,2004.
- [2] 张建强,张亚萍. 凸透镜成像的计算机模拟[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版),2012,38(1):71-72,76.
- [3] 陈立刚,冯伟伟,张玉婷,等. 基于 matlab 仿真的薄透镜焦距测定实验研究[J]. 大学物理实验,2015,28(3):108-110.
- [4] 余昌恺,岑剌. 凸透镜成像球差的模拟与测量[J]. 物理实验,2019,39(12):44-49.
- [5] 贾小文. Igor Pro 在物理实验数据处理中的应用[J]. 实验室科学,2020,23(2):88-92,96.
- [6] 尹中文. 厚透镜基点位置的计算[J]. 南阳师范学院学报(自然科学版),2002(2):44-46.
- [7] 徐寿泉. 弯月形厚透镜的基点和基面[J]. 大学物理,2001,20(1):23-25.

(下转 58 页)

Device characterization of pyroelectric infrared sensors

CHEN Luhao[†], WANG Weijie[†], WANG Yuxiang, ZHANG Cheng

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: Pyroelectric materials have excellent electrical properties and highly sensitive temperature response, therefore widely used in infrared light detection. A pyroelectric infrared sensor was employed to conduct a series of device performance characterization and research using the DC and AC lock-in technique. The signal waveform of the sensor upon single excitation was measured, and the time constant of the sensor was acquired through curve fitting. As the distance from the heat source increased, the signal intensity of the sensor gradually decreased, and the attenuation behavior agreed well with the theoretical thermal radiation model. Moreover, the frequency conversion AC detection was conducted based on lock-in technique. By heating a resistance by AC, the frequency response of the sensor and AC time constant were explored. The time constant obtained from a single signal excitation was consistent with the amplitude-frequency characteristics.

Key words: pyroelectric infrared sensor; time constant; infrared signal intensity; frequency response characteristics

[编辑:任德香]

(上接 52 页)

First-principles lens simulation and its teaching application

JIA Xiaowen, FAN Haiying, YIN Lin

(Fundamentals Department, Army Military Transportation University, Tianjin 300161, China)

Abstract: The measurement of lens focal length, the assembly of microscopes and telescopes, spectrometers, grating diffraction, prism diffraction, the determination of Young's modulus by the optical lever method, the Millikan oil drop experiment, Newton's rings and other experiments all involved the use of lenses. Most of the lenses used in teaching were regarded as ideal lenses, but real lenses had such problems as a certain thickness, aberrations, the non-coincidence between principal points and principal planes, and the light rays' deviation from the paraxial condition. All above led to deviations between the measurement results and the ideal results. Simulation technology could be used to visually demonstrate the influence of these factors on lens imaging. The specific algorithm based on first-principle lens imaging simulation was presented. The thin lens imaging was simulated, as well the influence of the base point and base surface parameters were calculated by numerical simulation algorithm. The performance and application of Fermat's principle in lens imaging were verified. The influence of aberration and off-axis light were also studied. The problems and precautions encountered in the measurement of lens focal length were discussed in combination with the simulation results.

Key words: lens; aberration; First-principles

[编辑:郭 伟]