

文章编号:1005-4642(2025)08-0015-06

非等亮点成像的衍射分辨极限瑞利判据研究式案例设计

张尚剑¹, 吴胤锋¹, 付尔谷¹, 李 健¹, 张锐凯², 顾 晨³

(1. 电子科技大学 光电科学与工程学院, 四川 成都 611731;

2. 电子科技大学 格拉斯哥海南学院, 海南 陵水 572000; 3. 清华大学 物理系, 北京 100084)

摘 要:以光学成像系统中衍射成像为案例,研究了分辨非等亮点衍射成像的瑞利判据问题;引入衍射光栅光谱仪的光谱成像案例,探究了非等强谱线与仪器响应函数对光谱分辨率的影响;通过特征参数拟合方法恢复光谱信息,提升光谱分辨率. 通过在波动光学课程中引入科教融合的研究式案例设计,培养学生项目化探究本领,强化学生创新能力;这一研究式案例设计促进了以学为中心的教学改革,有效支撑了国家级一流本科课程“物理光学”和校级研究生精品课程“光学原理”的课程建设.

关键词:瑞利判据;波动光学;夫琅禾费衍射;光栅光谱仪;光谱恢复

中图分类号:O436.1

文献标识码:A

DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2025.08.003

1 研究式项目设计背景

在光学成像领域,分辨率是衡量成像系统性能的关键指标之一. 瑞利判据作为判断分辨率极限的重要工具,其对于理解和改进光学成像系统至关重要. 瑞利判据是指光学成像系统能够分辨 2 个靠近的物点或物体细节的能力^[1],不仅量化了光学成像系统的分辨能力,而且揭示了由于衍射效应导致的成像限制. 瑞利判据在显微观察、天文望远镜设计、光刻机制造等领域具有广泛应用. 面向新工科拔尖人才培养要求,在波动光学课程中,本研究以学生为主体^[2],将科研素材引入教学设计当中,利用科教融合研究式案例引导学生进行自主性、创造性学习,从而提高学生的核心科学素养,培养学生的创新思维能力. 在深入探究光学成像衍射分辨极限瑞利判据的物理本质过程中,学生不仅可以理解光学衍射现象,认识光学成像系统分辨率概念,还能提升实践能力和思维深度^[3].

2 研究式项目案例

在光学成像系统中,由于衍射效应,理想的点物所成的像不再是理想的几何点像,而是具有一

定大小的衍射像斑(艾里斑),当 2 个物点过于靠近,其像斑重叠在一起,就可能分辨不出是 2 个物点的像,即光学系统中存在分辨极限^[4]. 通常采用瑞利判据来定义成像系统的分辨率,即当一个艾里斑的中心与另一个艾里斑的第 1 级暗环重合时,刚好能分辨出是 2 个像. 此时,若 2 个艾里斑继续接近,两者无法满足瑞利判据,无法分辨 2 个点光源. 瑞利判据是在 2 个艾里斑的中心强度相等的情况下定义分辨率的,而在实际情况中,相邻艾里斑的中心强度往往不相等. 非等亮点衍射成像的实际分辨率往往低于等亮点成像的瑞利判据所定义的分辨率. 本文目的是探究并分析非等亮点下成像的分辨率极限,并研究模糊光谱的谱线恢复方法.

2.1 非等亮点成像分辨的瑞利判据

假设圆孔衍射艾里图样的中心光强为 I_0 ,仅考虑一维的情况下,其光强分布为^[5]

$$I(z) = I_0 \left[\frac{2J_1(z)}{z} \right]^2, \quad (1)$$

式中, $z = \frac{2\pi}{\lambda} a \theta$, θ 为衍射角, λ 为光波波长, a 为圆孔半径, $J_1(z)$ 是 1 阶第一类贝塞尔函数. 当 $z = 1.22\pi$ 时,方程 $\frac{dI(z)}{dz}$ 有第一极小条件解,艾里斑

收稿日期:2025-01-05;修改日期:2025-03-31

基金项目:国家自然科学基金项目(No. 62475034);四川省高等教育人才培养质量和教学改革项目(No. JG2024-0221)

作者简介:张尚剑(1978—),男,江西鄱阳人,电子科技大学光电科学与工程学院教授,博士,主要从事高速光电融合集成与器件测试技术研究. E-mail:sjzhang@uestc.edu.cn

出现第1条衍射暗纹,由此得到衍射分辨率

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{2a}. \quad (2)$$

若系统焦距为 f ,则可以进一步得到艾里斑的半径为

$$r_0 = f\theta = \frac{1.22\lambda f}{2a}, \quad (3)$$

艾里斑半径决定了系统成像的线分辨能力.

假设有2个非等亮点所成的艾里斑衍射像中心处的强度分别为 I_{o1} 与 I_{o2} ,其强度满足 $I_{o2} = KI_{o1}$ ($0 < K < 1$),以 I_{o1} 艾里斑的中心为坐标原点, δ_z 为两圆斑中心之间的距离,两光斑叠加后的光强分布为

$$I(z) = I_{o1} \left[\frac{2J_1(z)}{z} \right]^2 + KI_{o1} \left[\frac{2J_1(\delta_z - z)}{\delta_z - z} \right]^2, \quad (4)$$

若 $\delta_z = 1.22\pi$,则满足一个衍射光斑的中央极大与近旁另一个衍射光斑的第1极小重合,两光斑达到等光强瑞利判据的分辨极限.

图1为 $\delta_z = 1.22\pi$ 时由式(4)绘制的光强分布曲线.当光强相等时,两光斑能够分辨;随着光强比降低,较小光强曲线的峰逐渐被覆盖,无法分辨.此时,等光强下瑞利判据得到的分辨率不再适用.

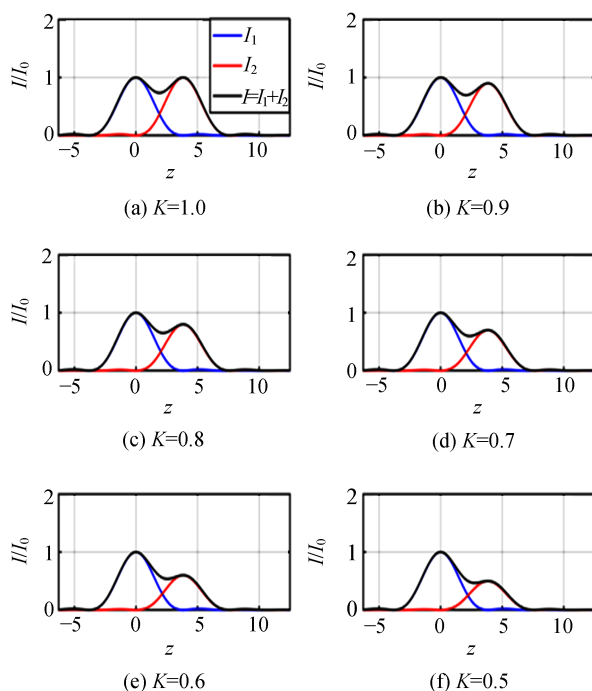


图1 $\delta_z = 1.22\pi$ 时的光强分布曲线

定义非等亮点成像瑞利判据条件^[6]:2个圆斑区域内合成光强最小处的光强是2束光中光强较小点的艾里斑中心强度的74%,此时两物点刚刚能够分辨.设2个艾里斑区域内合成光强最小处的坐标为 z_m ,于是有:

$$\begin{cases} \frac{J_1(z_m)J_2(z_m)}{z_m^2} = K \frac{J_1(\delta_z - z_m)J_2(\delta_z - z_m)}{(\delta_z - z_m)^2}, \\ \left[\frac{2J_1(z_m)}{z_m} \right]^2 + K \left[\frac{2J_1(\delta_z - z_m)}{\delta_z - z_m} \right]^2 = 0.74K. \end{cases} \quad (5)$$

求解式(5)的贝塞尔函数非线性方程组,利用Matlab进行数值计算,求得不同 K 条件下的数值解如图2所示. $K=1$ 即等光强时,依照瑞利判据条件,两光斑满足 $\delta_z = 1.22\pi$ 的第1极小条件分布.随着 K 远离1, δ_z 逐渐增大,对应的最小线分辨距离逐渐增大,衍射成像分辨率降低.因此,式(3)修正为

$$r_0 = \frac{\delta_z(K)\lambda f}{2\pi a}. \quad (6)$$

在精细光谱分析中,待测光谱的 K 往往与1偏移很大,相邻光斑强度甚至能够达到 10^3 量级的倍数差异,由此大大降低了光谱测试的分辨率.

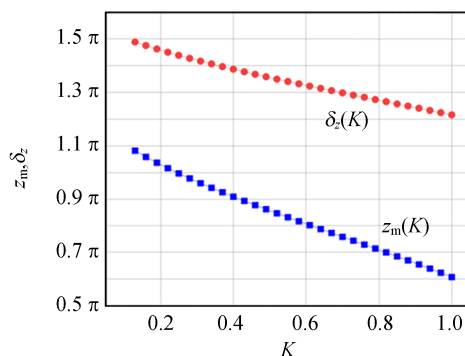
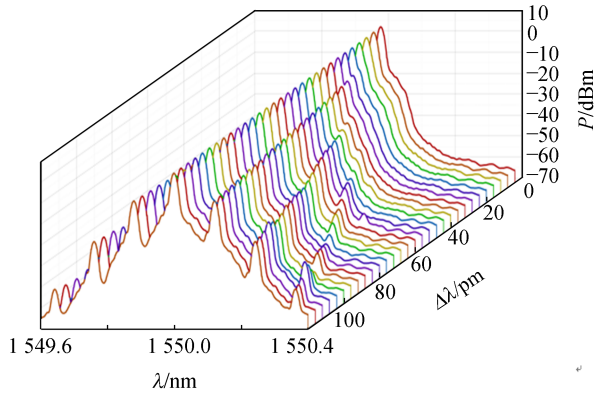


图2 z_m-K 与 δ_z-K 变化曲线

图3为利用衍射光栅光谱仪测量的具有不同波长间隔的光谱图.光谱产生方式为将1550 nm 波长激光射入电光调制器,通过调节电光调制器的信号改变输出光谱的波长间隔,随后进入光谱仪测量.测量光谱的光栅光谱仪的标称分辨率为20 pm,而这是在2个相邻峰值谱线强度相等情况下的分辨率.从图3中可以看出,随着波长间隔逐渐减小,强度较低的谱线逐渐被强度较大的谱线掩盖,最终无法分辨.此时,普通的瑞利判据无法适用.

图 3 光栅光谱仪测量的不同波长间隔 $\Delta\lambda$ 的光谱

2.2 光栅光谱仪的分辨率

在前文所述衍射光栅光谱分析中,衍射形成的艾里斑使得光栅光谱仪测量的谱线被展宽,相邻谱线的强度不相等使得实际测量的光谱分辨率低于光栅光谱仪的分辨率(20 pm),在不同相对光强下的测量分辨率如图 4 所示。

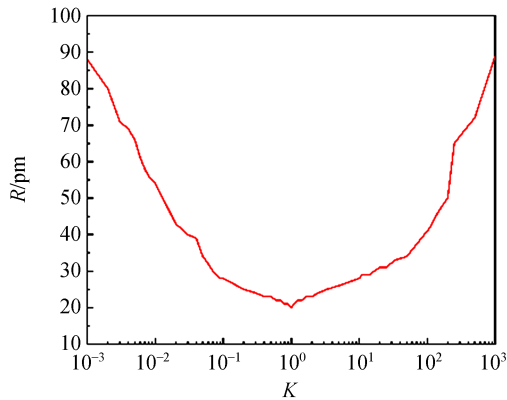


图 4 不同谱线相对强度下光栅光谱仪的分辨率

在光谱分析中,入射光信号的光场振幅可用通用的形式表示为

$$E(t) = \sum_{n=1}^N a_n \exp \left[j \left(\frac{2\pi c}{\lambda_n} t + \varphi_n \right) \right], \quad (7)$$

式中, N 为光信号具有的不同波长的分量数量, λ_n 为第 n 个分量的波长, a_n 和 φ_n 分别为第 n 个光波长分量的振幅和相位. 式(7)所示光信号对应的强度谱可表示为

$$x(\lambda) = \sum_{n=1}^N I_n \delta(\lambda - \lambda_n), \quad (8)$$

式中, I_n 为第 n 条谱线的强度. 由式(8)可见,理

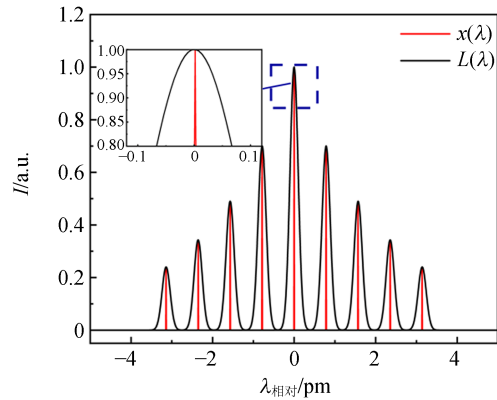
想光谱为一系列强度不同的 δ 函数的线性叠加。

受多种因素影响,光栅光谱仪的谱线展宽函数并不是标准的夫琅禾费衍射光强分布曲线^[7-8],无法用解析式来表示,一般用仪器响应函数 $h(\lambda)$ 来描述谱线展宽的过程. 由于光谱仪仪器响应函数展宽的影响,实测的光谱为真实光谱与仪器响应函数的卷积^[9],并且光源也并不是绝对的单色谱,因此光源输出具有一定的谱宽,而非式(8)中的 δ 函数形式。

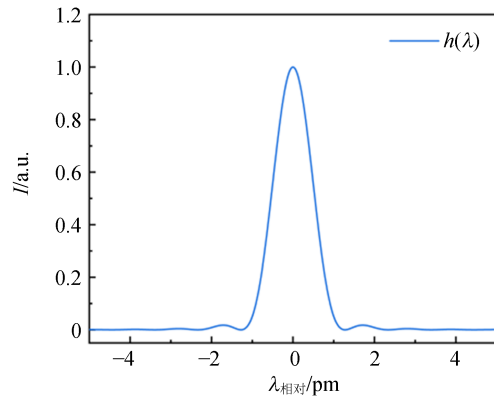
假设光源输出光谱函数为 $L(\lambda)$,那么实测光谱为固有光谱 $x(\lambda)$ 、光源函数 $L(\lambda)$ 和仪器响应函数 $h(\lambda)$ 的复合卷积,表示为

$$y(\lambda) = x(\lambda) * L(\lambda) * h(\lambda). \quad (9)$$

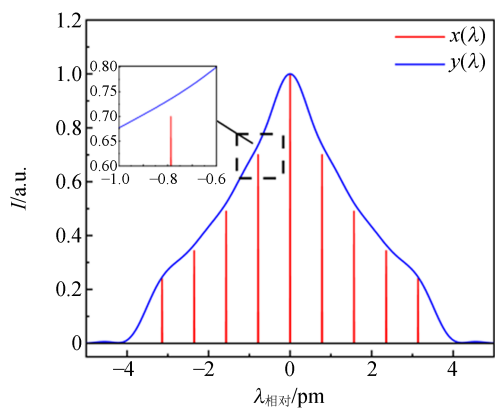
如图 5 仿真中所示,理想光谱的原始 δ 函数光谱在经过一系列卷积展宽之后,其实测光谱变得模糊,难以分辨,且原始光谱峰值强度与实测结果出现了偏差。



(a) 光源函数拟合曲线



(b) 光谱仪响应函数曲线



(c) 实测光谱曲线

图 5 光谱拟合曲线及实测曲线

令 $h_L(\lambda)$ 为光源函数 $L(\lambda)$ 和仪器响应函数 $h(\lambda)$ 的卷积, 即

$$h_L(\lambda) = L(\lambda) * h(\lambda), \quad (10)$$

可认为 $h_L(\lambda)$ 是光谱仪实测的光源光谱, 其同时包含了光源与仪器响应函数的信息. 于是实测光谱可表示为固有光谱 $x(\lambda)$ 和实测单个谱线响应 $h_L(\lambda)$ 的卷积, 即

$$y(\lambda) = x(\lambda) * h_L(\lambda). \quad (11)$$

因此, 在实际光谱仪测试中, 当相邻谱线强度不相等时, 往往达不到光谱仪的最佳分辨率. 此外, 即使在谱线能够分辨的情况下, 仪器响应函数展宽的相互叠加也会给谱线强度的测量引入额外的误差. 如图 6 所示, 由于谱线展宽叠加的影响, 通过实测光谱中的谱峰读取到的强度值比实际值高 1 dB.

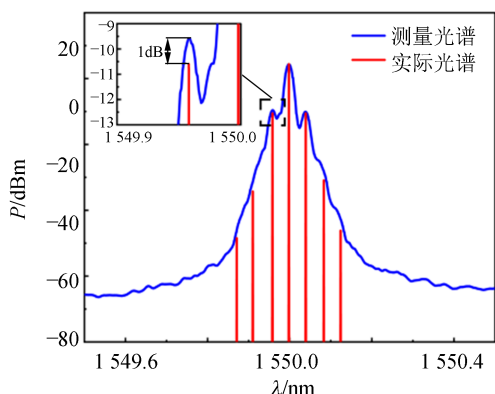


图 6 仪器响应函数展宽的相互叠加导致的强度测量误差

2.3 光谱信息提取和恢复

综合上述分析可知, 非等亮点的存在和仪器

响应函数的展宽共同降低了光谱测试分辨率. 仪器响应函数可以通过优化硬件的光学成像系统、机械结构得到改善, 但不可避免地带来成本的提高, 而且无法消除非等亮点带来的分辨率下降问题. 使用算法对所获取的实测光谱数据进行光谱分析是提升测试分辨率与强度精度的另一思路. 为了消除仪器响应函数展宽和测试对象非等亮点导致的分辨率降低及其引入的谱峰强度测量误差问题, 需要对式(11)所示的卷积退化过程进行处理, 以提取出 δ 函数线性叠加组成的固有光谱^[10]. 从实测光谱中分辨出相互重叠的固有谱线以提高光谱的分辨率与减小谱线强度误差, 也可以将此过程看作是峰值重叠的解析问题, 即通过数据处理的方式将实测谱线中相互重叠甚至完全覆盖的谱峰分解出来, 从而提取出光谱数据中的有用信息.

在峰值重叠解析方法中, 曲线拟合方法分离重叠峰的结果精确^[11-12], 因此应用广泛. 但良好的拟合结果依赖于峰的数量和峰的位置信息, 对于未知谱线而言需要采取一些方法获取峰位信息才能进行拟合. 若已知光谱中谱线的位置信息, 则可采用曲线拟合的方法提取出固有光谱谱线.

若入射光为波长信息已知、具有一系列等间隔光谱谱线, 如对电光相位调制器产生的光调制谱, 各个谱线的强度之间存在贝塞尔函数分布关系^[13], 其与谱线波长信息有关, 式(8)可改写为

$$x_m(\lambda) = A \sum_{n=-N}^{+N} J_n^2(\epsilon) \delta[\lambda - (\lambda_c + n\lambda_m)], \quad (12)$$

式中, x_m 为调制后(modulated)的光谱, λ_c 为中心光谱波长, λ_m 为谱线间隔. 电光调制器产生的固有光谱满足上述模型分布, 光谱中各谱线的强度系数为: $I_n = AJ_n^2(\epsilon)$, 其具有第一类贝塞尔函数形式的强度关系, 曲线拟合方法可以充分利用该部分先验信息对拟合进行约束. 拟合过程中与强度有关的参数有 ϵ 与 A , ϵ 是与调制器特性参数有关的未知量, A 与光源光功率有关. 为了得到卷积模型中的 $h_L(\lambda)$, 可利用光栅光谱仪测量窄线宽激光的光谱来获得 $h_L(\lambda)$ 近似数据, 如图 7 所示.

通过将固有光谱模型函数 $x_m(\lambda)$ 和光谱仪近似响应函数 $h_L(\lambda)$ 卷积, 可得到拟合光谱函数表达式为

$$y_m(\lambda) = x_m(\lambda) * h_L(\lambda). \quad (13)$$

曲线拟合方法在已知谱线位置的条件下,通过光谱卷积模型对实测光谱数据进行拟合,从而得到谱线强度系数 I_n . 拟合的目标函数为

$$\min D = \sum_{i=1} [y_{\text{OSA}}(\lambda_i) - y_m(\lambda_i)]^2, \quad (14)$$

其中, $y_{\text{OSA}}(\lambda_i)$ 和 $y_m(\lambda_i)$ 分别是光谱仪实测光谱数据向量和拟合数据向量的第 i 个数据. 利用数值方法求解该最小二乘优化问题即可得到拟合结果,从该拟合光谱中即可得到对应的强度参数 A 与 ϵ ,恢复出固有光谱,从而获取各个谱线的强度系数 I_n .

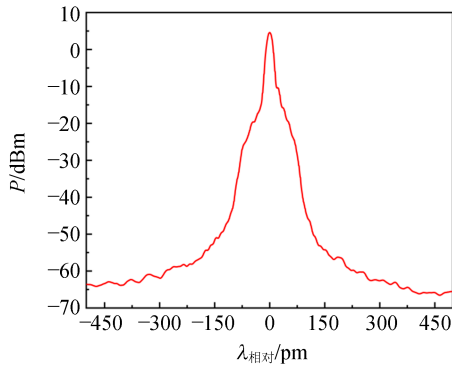
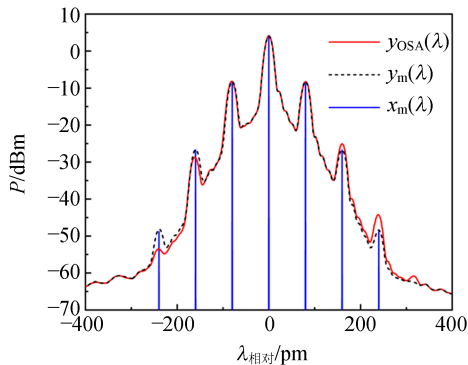
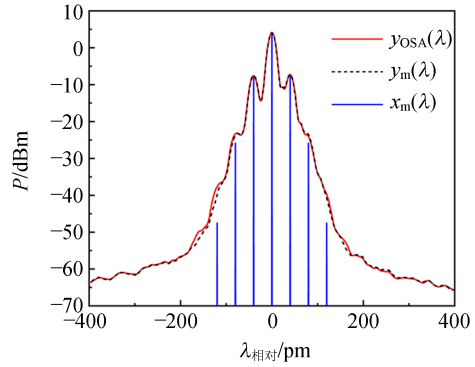


图 7 实测窄线宽激光的光谱

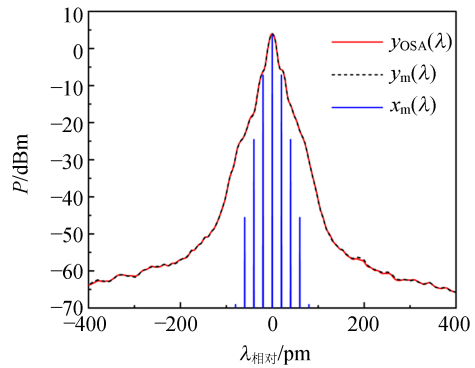
将激光器产生的激光通入电光调制器,通过改变调制器电信号使得出射光分别具有不同的波长间隔,利用衍射光栅光谱仪获得测试光谱,最后使用曲线拟合方法从测试谱中恢复固有光谱. 测量光谱、拟合光谱与恢复的固有光谱分别如图 8 中 $y_{\text{OSA}}(\lambda)$, $y_m(\lambda)$ 和 $x_m(\lambda)$ 所示. 从图 8 中可见在光谱波长间隔较小、相邻谱峰强度不等导致光谱仪难以分辨波长的情况下,该方法成功区分了光谱谱峰,消除了非等亮点和仪器响应函数展宽的影响,提升了光栅光谱仪的分辨率,实现了光谱的高分辨分析.



(a) $\lambda_m = 80$ pm



(b) $\lambda_m = 40$ pm



(c) $\lambda_m = 20$ pm

图 8 不同波长间隔下的拟合结果

3 结束语

本文从衍射光栅光谱仪实际测量结果出发,发现非等亮点衍射成像的实际分辨率低于等亮点衍射成像瑞利判据所定义的分分辨率. 通过理论分析与仿真探究了非等亮点分辨率的瑞利判据以及光强比远离 1:1 导致的分辨率降低问题. 结合光栅光谱仪谱线展宽的原理与光谱的特性,通过曲线拟合方法实现了非等亮点光谱的提取和恢复. 在波动光学课程中,本文以学生为中心,通过目标导向的研究式案例设计,将科研与教学有机衔接,鼓励学生运用科研思维理解教学内容,运用开放思维解决问题,从而引导并培养学生的问题发掘、推理预测、验证总结等能力,进一步强化自主创新的挑战性学习. 这种研究式项目案例促进了科研与教学融合,实现了以研促学、以学促教的目标,有力推动了国家级一流本科课程“物理光学”和学校研究生精品课程“光学原理”的教学创新,为培养光电专业和光学工程学科高素质人才贡献力量.

参考文献:

- [1] 叶玉堂,张尚剑,饶建珍. 光学教程[M]. 北京:清华大学出版社,2024:227-230.
- [2] 陈雪,于冰. “实验”内涵的演变及其教育启示[J]. 物理实验,2023,43(9):55-59.
- [3] 翁雨燕,钱懿华,傅洋,等. “教师引导,学生自主”的真实问题课题研究[J]. 物理实验,2023,43(6):54-57.
- [4] 吴健,严高师. 光学原理教程[M]. 北京:国防工业出版社,2007:165-167.
- [5] BORN M, WOLF E. 光学原理:光的传播、干涉和衍射的电磁理论[M]. 杨葭荪,译. 北京:电子工业出版社,2009:365-368.
- [6] 龙长应. 不等光强非干光的瑞利判据[J]. 厦门大学学报(自然科学版),1993(S2):462-464.
- [7] 王兴权. 光栅光谱仪原理及设计研究[D]. 长春:长春理工大学,2006.
- [8] 王风丽,马晓英,侯虎,等. 基于 zemax 软件的光栅光谱仪分辨能力仿真实验[J]. 实验室研究与探索,2021,40(11):111-116.
- [9] 张亦弛. 基于超高分辨率光谱分析的自适应相干解调技术研究[D]. 武汉:华中科技大学,2014.
- [10] LI J, XU Y, ZOU X H, et al. Resolving intrinsic modulation spectral lines from electro-optic modulation spectra based on boosted iterative deconvolution [J]. Photonics, 2022,9(11):878.
- [11] HU Y G, Li W, Hu J M. Resolving overlapped spectra with curve fitting [J]. Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy, 2005,62(1/3):16-21.
- [12] ZHANG X Q, ZHENG H B, GAO H. Curve fitting using wavelet transform for resolving simulated overlapped spectra [J]. Analytica Chimica Acta, 2001,443(1):117-125.
- [13] 王恒. 基于自外差的高速光电子器件频域特性表征技术研究[D]. 成都:电子科技大学,2018.

Exploratory case design of Rayleigh criterion of diffraction resolution limit of non-uniform bright points

ZHANG Shangjian¹, WU Yinfeng¹, FU Ergu¹, LI Jian¹, ZHANG Ruikai², GU Chen³

(1. School of Optoelectronic Science and Engineering,

University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China;

2. Glasgow College Hainan, University of Electronic Science and Technology of China,

Lingshui 572000, China; 3. Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Taking diffraction imaging in optical imaging systems as an example, the Rayleigh criterion for distinguishing non-uniform bright spots diffraction imaging is investigated. The spectral imaging case of diffraction grating spectrometer is introduced to explore the influence of non-uniform spectral lines and instrument response function on spectral resolution. Finally, spectral resolution is improved through restoring spectral information using characteristic parameter fitting methods. By introducing exploratory case that can integrate research and teaching into the wave optics course, the aim to cultivate students' projectized exploratory skill and strengthen their innovation ability is realized. This exploratory case design has promoted learning-centered teaching reform and effectively supported the national first-class undergraduate course "Physical Optics" and the university-level elite graduate course "Optical Principles".

Key words: Rayleigh criterion; wave optics; Fraunhofer diffraction; grating spectrometer; spectral recovery

[编辑:龙玉梅]