

文章编号: 1005-4642(2022)10-0038-08

学
生
园
地



三面骰子的动力学分析和几何特性

范祥彬, 卢奕合, 刘道娜, 王铁成

(山西大学 物理电子工程学院, 山西 太原 030006)

摘 要:以 2022 年 CUPT 第 7 题“三面骰子”为选题, 探究了骰子落下时立在侧面、正面与反面的概率相同时, 骰子的几何特征和物理性质. 提出了多种模型, 并通过实验来验证所设计的模型. 考虑了投掷方式、反弹特性、接触面材质等多种因素对骰子概率的影响, 最终确定了三面骰子立在侧面、正面与反面概率相同的形状及投掷规则.

关键词:CUPT; 概率; 三面骰子; 几何特性; 反弹特性; 投掷方式

中图分类号:O311

文献标识码:A

DOI:10.19655/j.cnki.1005-4642.2022.10.007

2022 年 CUPT 第 7 题: 硬币落地时侧面站立的情况十分罕见. 为了使圆柱形骰子落下时立在侧面、正面与反面概率相同, 应该具有怎样的物理性质和几何特征?

目前已经有研究者对三面骰子的问题展开过详细的描述^[1], 但是仍然存在一些细节没有得到解答. 例如, 在投掷三面骰子时, 如果给予它水平方向的速度, 侧面出现的概率会发生什么变化? 三面骰子反复弹跳是否会有不同的结果? 基于以上问题, 本文进行了相关研究和讨论.

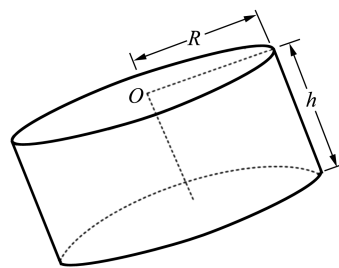
首先, 把硬币定义为圆柱体, 当它充分翻转落地时, 虽然侧面出现的概率极小, 但却不能忽略其可能性. 硬币除了有 1 个平移自由度外, 还有 2 个旋转自由度, 但是在实际情况下, 由于硬币的对称性(侧面高度趋于零), 平移自由度作用并不明显, 因此可以认为理想硬币落在正面或者反面的概率近似为 1/2, 但是一旦改变其侧面的厚度, 立在侧面的概率就会改变, 正面或者反面的概率将不再是 1/2.

对于硬币、正方体骰子和陀螺骰子而言, 立在不同面的概率可以通过物体的对称性来预测. 但当物体不再具有精确的对称性时, 立在不同面的概率就不可能只受几何特征的影响, 还需要考虑弹跳的影响.

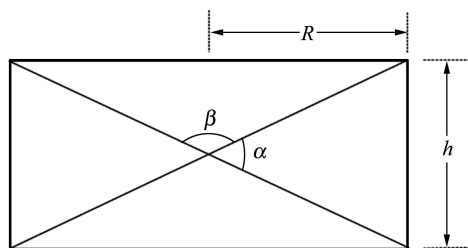
1 三面骰子的定义

三面骰子的立体图及截面图如图 1 所示, 设圆柱半径 R 与高度 h 的比为

$$\eta = \frac{R}{h}, \quad (1)$$



(a) 立体图



(b) 截面图

图 1 圆柱体立体图和截面图

收稿日期:2022-05-11; **修改日期:**2022-06-08

作者简介:范祥彬(2001—), 男, 福建三明人, 山西大学物理电子工程学院物理学专业 2020 级本科生. E-mail: 20200110101045@email.sxu.edu.cn

通讯作者:王铁成(1988—), 男, 山西长治人, 山西大学物理电子工程学院讲师, 博士, 从事微纳光学方面的研究工作. E-mail: tcwang@sxu.edu.cn

则内角为

$$\beta = 2\arctan(2\eta), \quad (2)$$

$$\alpha = 2\arctan\left(\frac{1}{2\eta}\right). \quad (3)$$

2 骰子的投掷方式

研究者们大都假设三面骰子竖直下落,而不具有水平方向的速度,下面给出简单的理论解释.

根据最小作用量原理,每个力学系统都可以表征为确定函数 $L(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; t)$ 或者 $L(q, \dot{q}, t)$.

假设在 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 时刻,系统的位置由 2 组坐标 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 确定,则系统在这 2 个位置之间的运动积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (4)$$

取最小值,其中 q 和 \dot{q} 均是 t 和 η (无穷小参量)的函数.

为使 S 最小,则需满足 $\frac{\partial S}{\partial \eta} = 0$, 而

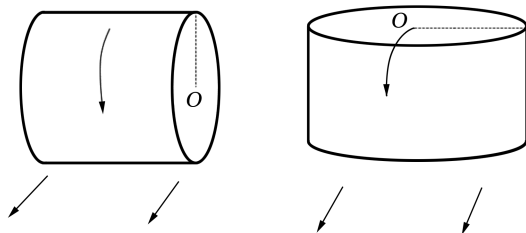
$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \eta} dt, \quad (5)$$

故

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (6)$$

函数 L 为给定系统的拉格朗日函数或拉格朗日量,积分 S 为作用量.

当仅考虑三面骰子落地时的状态(落地前的运动行为不考虑),假设骰子在地面沿直线滚动.现以三面骰子向前滚动时的 2 种极端的运动方式为例,即侧面滚动和正反面轮流翻滚(图 2). 利用式(1)求出这 2 种运动方式的 η 值,其他运动方式的 η 值介于这两者之间.



(a) 侧面滚动 (b) 正反面轮流翻滚

图 2 骰子落地时运动的 2 种极限情况

2.1 侧面滚动

为简单起见,设三面骰子落地时的运动方向

为 x 正方向,质心速度为 \dot{x} ,地面为零势能面,并且光滑. 因为给骰子提供了初始的转动动量,因此它将保持自身的运动状态无限滚动^[2]. 在纯滚动条件下,骰子的滚动速度为 $v = \omega r$,此时骰子侧面着地,重心始终在同一水平线,因此势能 V 不变(势能只与空间位置有关,而与速度和时间无关),动能项包括平动动能和转动动能,表示为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (7)$$

$$J = \frac{1}{2} m R^2, \quad (8)$$

拉格朗日量

$$L = T - V = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 - V, \quad (9)$$

根据拉格朗日方程,则有

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{3}{2} m \ddot{x} = 0, \quad (10)$$

由于 V 为常量,故 $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$. 上式可以化简为

$$\ddot{x} = 0, \quad (11)$$

积分可得

$$x = C_1 t + C_2. \quad (12)$$

2.2 正反面轮流翻滚

如图 2(b)所示,骰子势能 V 不再是常量,并其转动惯量为

$$J = \frac{m}{12} (3R^2 + h^2), \quad (13)$$

故动能可表示为

$$T = \frac{5}{8} m \dot{x}^2 + \frac{m}{24} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \dot{x}^2, \quad (14)$$

拉格朗日量为

$$L = \frac{5}{8} m \dot{x}^2 + \frac{m}{24} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \dot{x}^2 - V, \quad (15)$$

根据拉格朗日方程可得:

$$\left[\frac{5}{4} m + \frac{m}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (16)$$

根据 $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$, 式(16)可改写为

$$M \ddot{x} - F = 0, \quad (17)$$

其中 $M = \frac{5}{4} m + \frac{m}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2$. 对式(17)积分得

$$x - \frac{\iint F d\tau dt}{M} = C_3 t + C_4. \quad (18)$$

对比图 2(a)和图 2(b),可以看到在图 2(b)情况下,骰子会受到额外的耗散力影响,因此图 2

(a)消耗能量较少,图 2(b)消耗能量较多,其他运动状态则介于二者之间. 由于圆形物体滚动时,其重心高度相对于地面接触点不变,滚动时不需要克服重力做功,处于能量最低态,是最稳定的运动方式. 因此骰子总是趋向于侧面着地.

在现实情况中,首先骰子会受到地面的影响,使得骰子滚动时的轨迹为曲线,但曲线轨迹并不会影响结论;其次,滚动摩擦力比最大静摩擦力小得多,侧面滚动主要受到滚动摩擦,正反面翻滚主要受到最大静摩擦,即前者相比后者更能保证运动最大量,可以很大程度上减小克服摩擦力做功. 因此,即使考虑摩擦影响,骰子也是趋向于侧面滚动状态. 所以可得出以下结论:三面骰子如果具有水平方向的初速度,骰子总是趋向于侧面着地向滚动. 性质会影响骰子立地概率的公平性,从而导致实验结果与实际不符.

那么,是否可以得出具有一定厚度的三面骰子都是趋向于侧面着地的结论呢? 对此,对不同尺寸的三面骰子的着地情况进行统计,结果如表 1 所示.

表 1 不同尺寸的三面骰子着地的情况

2η	着地次数		
	正面	反面	侧面
1 : 1	3	2	60
2.83 : 1	13	13	40

实验采用的骰子直径 $2R = 2.500 \text{ cm}$, $h = 0.833 \text{ cm}$,如若不给初速度,正常投掷,大都会认为骰子正反面着地的可能性大,然而表 1 却是侧面落地的次数多,表明骰子向前投掷会增加侧面着地的概率,与理论猜想相同.

同样利用硬币进行翻滚实验时,大多数情况下也都是侧面向前滚动的情况,但由于硬币的侧面尺度很小,立地条件不足,容易受到外界扰动的影响,所以不论怎么抛掷都不会影响公平性.

如果地面光滑,采用向前抛掷的方法,硬币便不会受到外界扰动,将保持自身的惯性,从而有可能出现侧面立地的情况. 因此,在投掷圆柱形骰子时,尽量保持骰子在水平方向无初速度.

3 三面骰子实验设计

图 3 所示骰子是以 ABS 材质为原材料的实

心圆棒,利用游标卡尺测量长度,通过手工锯和锉刀切割磨皮,虽以上制作方法存在较大误差(手工切割所带来的正反两面的不对称),但由于目前只是验证模型,即只需证明侧面出现的概率接近 $1/3$,因此可以忽略误差带来的影响. 骰子直径固定 2.500 cm ,制作不同高度的骰子,实验时 1 次性投掷 5 个相同高度的骰子,多个数据点可以避免单一骰子带来的固有偏差^[3].



图 3 手工骰子

第 2 章已证明三面骰子水平方向不应具有初速度,为了避免这种情况,设计了如图 4 所示的投掷装置.

将骰子从宽口丢下,让骰子充分旋转,在骰子接近窄口时,由于路口变窄,骰子剧烈震荡,骰子的转动动能部分损失,并转化为竖直向下的动能,这样就满足了第 2 章中论述的限制条件. 改变投掷装置的高度,可改变骰子的弹跳情况. 投掷装置采用 5 L 矿泉水桶裁去桶底部分制作.

当三面骰子竖直落地时,由于边缘落地带来的反弹,能量在竖直方向可能无法抵消,从而让骰子具有水平方向的动能(在同一竖直线反复弹跳的结果不太可能出现),那么当出现该情况时,需要舍弃该结果并重新投掷. 此外,设计骰子分别在水泥和 PVC 材质的接触面上着地.

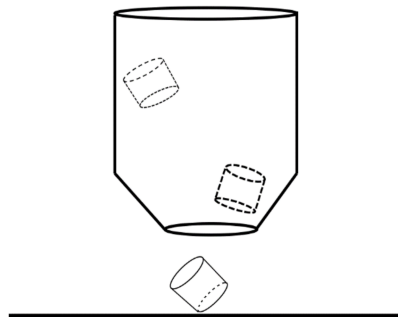


图 4 投掷装置示意图

4 三面骰子模型

在完全不考虑反弹的情况下提出了 3 种三面

骰子的模型,出发角度各不相同,得出的结果也有差异.为了验证前文内容,设置了 3 种实验环境:在无初速度时水泥面和 PVC 面着地,以及有初速度时,骰子在水泥面着地的情况.

设侧面出现的概率为 P_s ,由于三面骰子只有侧面、正面和反面 3 种可能,所以侧面出现的概率应为 $P_s = \frac{1}{3}$.

4.1 圆柱体表面积模型

通过借鉴标准正方体骰子出现等概率性的特性,猜想表面积可能是影响因素之一,于是得出:

$$P_s = \frac{2\pi R h}{2\pi R^2 + 2\pi R h} = \frac{\eta}{1 + \eta} = \frac{1}{3}, \quad (19)$$

可得 $\eta = \frac{R}{h} = \frac{1}{2}$. 实验验证结果如表 2 所示.

表 2 圆柱体表面积模型骰子着地情况

接触面	初速	着地次数		
		正面	反面	侧面
水泥	无	16	14	115
PVC	无	14	11	125
水泥	有	23	27	505

表 2 显示侧面出现的次数远大于正面和反面,说明了单纯利用表面积探究骰子模型行不通.并且从上述数据可以得出粗略的范围 $\eta > \frac{1}{2}$.

4.2 立体角模型

假设硬币 3 面着地的概率相等,则 $\eta = \sqrt{2}$,以此建立立体角模型^[4]如图 5 所示.

设球冠的表面积为 A ,利用微元法求解.在球冠上取细小的圆环,半径为 r ,弧长为 $dl = R d\theta$,于是面积为

$$dA = 2\pi r dl = 2\pi r R d\theta, \quad (20)$$

$$A = \int dA = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r R d\theta, \quad (21)$$

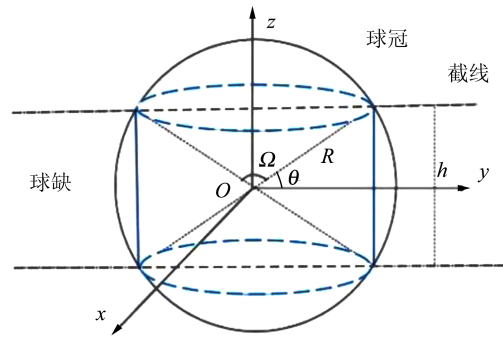
因 $r = R \cos \theta$,则

$$A = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi R^2 \cos \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \sin \theta). \quad (22)$$

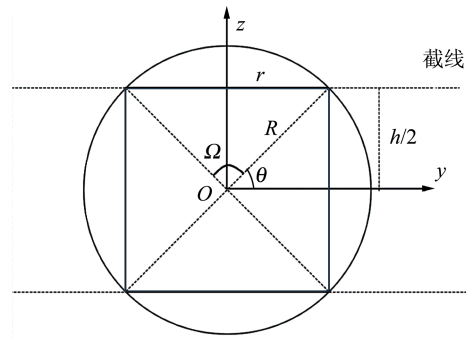
由图 5(a)所示的几何关系,可以得到 $\sin \theta = \frac{h}{2R}$,则

$$A = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{h}{2R}\right). \quad (23)$$

由立体角公式,有



(a) 立体图



(b) 截面图

图 5 从球体中截出圆柱

$$\Omega = \frac{A}{R^2} = 2\pi \left(1 - \frac{h}{2R}\right), \quad (24)$$

为使其平均,应该使得立体角为

$$\Omega = \frac{1}{3} \times 4\pi. \quad (25)$$

可得 $\frac{h}{R} = \frac{2}{3}$. 注意,此处的 R 与模型 1 和 2 中的不同,它是指球的半径, r 才是需要的量,又由图 5(b)可以得到:

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{2}h, \quad (26)$$

故 $\eta = \frac{r}{h} = \sqrt{2}$,通过实验可以得到表 3 数据.

表 3 立体角模型骰子下落情况

接触面	初速	着地次数		
		正面	反面	侧面
水泥	无	231	200	91
PVC	无	214	182	105
水泥	有	152	163	315

由表 3 中数据得:水泥接触面时骰子的正面概率 $P_A = 0.443$,反面概率 $P_B = 0.383$,侧面概率

$P_S=0.174$;PVC 接触面时骰子的正面概率 $P_A=0.427$,反面概率 $P_B=0.363$,侧面概率 $P_S=0.210$. 很明显,侧面概率与理想值 0.333 有较大偏差. 故冯诺依曼假设仅在数学模型上合理,但与实验结果不符.

4.3 重心模型

图 6 为三面骰子落地时与接触面接触时的一种状态,重心线的偏向决定了三面骰子倒地的结果^[5], θ 为重心线与 x 轴的夹角, OH 为重心线,决定骰子的偏向.

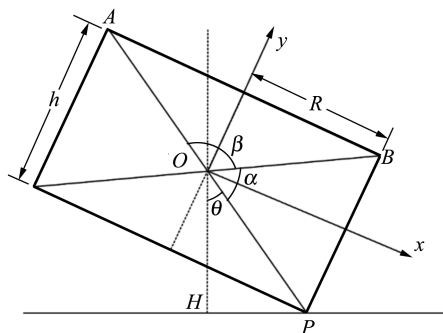


图 6 圆柱骰子截面图

由图 6 可知角度 θ 与 α 和 β 有如下关系:当 $\frac{\alpha}{2} < \theta < \beta + \frac{\alpha}{2}$ 时,正面着地;当 $-\frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\alpha}{2}$ 或者 $\pi - \frac{\alpha}{2} < \theta < \pi + \frac{\alpha}{2}$ 时,侧面着地;当 $\pi + \frac{\alpha}{2} < \theta < 2\pi - \frac{\alpha}{2}$ 时,反面着地. 所以,为使三面着地概率相等,则需要满足 $\frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{3}$,可得 $\eta = \frac{R}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 通过实验可以得到如表 4 所示数据.

表 4 重心模型下骰子下落情况

接触面	初速	着地次数		
		正面	反面	侧面
水泥	无	171	164	175
PVC	无	165	181	169
水泥	有	104	80	345

由表 4 中数据可得:接触面为水泥且无初速的条件下,骰子正面概率 $P_A=0.335$,反面概率 $P_B=0.322$,侧面概率 $P_S=0.343$,侧面相对偏差 $E_r=3.0\%$;接触面为 PVC 且无初速的条件下骰子正面概率 $P_A=0.320$,反面概率 $P_B=0.351$,侧面概率 $P_S=0.328$,侧面相对偏差 $E_r=1.5\%$. 数

据与理论吻合较好.

在不考虑反弹的情况下,模型 3 的实验结果与理论最为贴合,说明了当物体不再具有精确的对称性时,最终结果的概率不能只依赖于物体的几何特征,还需要考虑骰子的物理特性,通过实验结果可以得到骰子的粗略范围 $\eta = \frac{R}{h} > \frac{1}{2}$,即直径 $D > h$.

5 弹跳模型

上文仅考虑了三面骰子落地瞬间便损失全部动能的情况,现以简单弹跳情况为例进行分析. 假设每次落地损失一部分动能,即三面骰子经过多次反复弹跳才会停止,并且每次落地弹跳之后会经过充分旋转,再次落地时方向依旧随机. 假设初始时,三面骰子具有能量 E ,第一次与地面碰撞后能量为 γE ,第 n 次碰撞后能量为 $\gamma^n E$ ($n=1, 2, 3 \dots$),其中 $\gamma < 1$ 为衰减系数^[6].

定义 2 个能量值 E_{AB} 和 E_S ,它们分别表示底面和侧面的能量势阱,如图 7 所示. 假设底面的势阱高,即 $E_S > E_{AB}$ (若 $E_S < E_{AB}$ 得到的结果一致),当能量小于某个势阱时,三面骰子将处于稳定状态,想要逃脱该势阱必须外力做功.

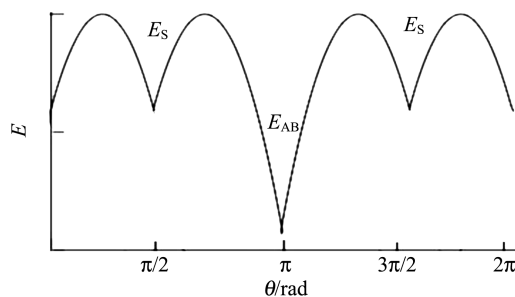


图 7 $E_S > E_{AB}$ 情况下对应的能量势阱图

此时落在 2 个山谷的概率正比于两侧山峰的间距,则会出现如下情况:

1) 假设经过 n 次弹跳,能量为 $E_{AB} < \gamma^n E$, $\gamma^{n+1} E < E_{AB}$, $\gamma^n E < E_S$ 则最终处于正面的概率为

$$P_A = \left(\frac{2\alpha}{2\pi}\right)^0 \frac{\beta}{2\pi} + \left(\frac{2\alpha}{2\pi}\right)^1 \frac{\beta}{2\pi} + \left(\frac{2\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{\beta}{2\pi} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\alpha}{2\pi}\right)^n \frac{\beta}{2\pi}. \quad (27)$$

该假设还可以表述为:假设前 m 次碰撞,其能量为 $\gamma^m E > E_S$,而 $E_{AB} < \gamma^{m+1} E < E_S$,则前 m 次

不会落入任何势阱,上文已经假设骰子每次碰撞后,都会充分旋转之后再落地碰撞,可知前 m 次的碰撞都充分且随机,因此可不再考虑,直接从第 $m+1$ 次考虑即可. 为了简化起见,假设第一次碰撞之后的能量都会落入势阱,便不从第 m 次开始,即 $\gamma E < E_s$.

2) 假设经过 n 次碰撞后能量为 $\gamma^n E < E_{AB} < \gamma^{n-1} E$, 且 $\gamma E < E_s$, 则最终处于侧面的概率为

$$P_s = \left(\frac{2\alpha}{2\pi}\right)^n, n \geq 1. \quad (28)$$

现考虑式(27),当 $n=0$ 时, $\frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{3}, \eta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 当 $n \geq 1$ 时,

$$\sum_{n=0}^{n-1} \left(\frac{2\alpha}{2\pi}\right)^{n-1} \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{3}, \quad (29)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n = \frac{1}{3}, \quad (30)$$

$$\eta = \frac{1}{2 \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \right]}; \quad (31)$$

当 $n=1, \eta = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 0$; 当 $n=2, \eta = 0.3912 < \frac{1}{2}$; 当 $n=3, \eta = 0.261 4 < \frac{1}{2}$; 当 $n \rightarrow \infty, \eta = \frac{R}{h} \rightarrow 0$. 此时三面骰子成为细圆柱棒,也就是说侧面出现的概率 $P_s \rightarrow 1$. 也间接说明了 $n \geq 2$ 的情况确实不合理.

现考虑式(28),则

$$\frac{\alpha}{\pi} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (32)$$

$$\eta = \frac{1}{2 \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \right]}; \quad (33)$$

该结果与式(30)和式(31)相同.

当 $E_s = E_{AB}$ 时,对应如图 8 所示的能量势阱. 骰子经过 n 次弹跳后,能量为 $\gamma^n E < E_{AB} = E_s < \gamma^{n-1} E$, 则三面骰子侧面着地的概率为

$$P_s = \frac{2\alpha}{2\pi}, \quad (34)$$

化简得 $\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

此条件下得到的结果,与前面结果相同,但此种情况很特殊,等式成立的条件比不等式成立更加苛刻,因此不易实现.

在本节中,得出结论有:三面骰子不允许多次

弹跳,否则实验结果会出现很大偏差. 所以实验过程中要求三面骰子落地后,动能必须立刻损失或弹跳 1 次后减为零,否则将不会出现等概率事件.

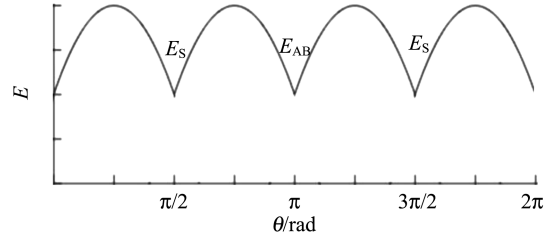


图 8 $E_s = E_{AB}$ 情况下对应的能量势阱图

在构造弹跳模型时,没有给出 E 和 r 的数值,因此做了如下假设:

- a. 每次碰撞后的能量衰减参量不变,并且各个接触点的衰减参量都相同;
- b. 每次弹跳落地前都经过充分旋转,落地后再次随机;
- c. E 和 γ 不同取值不会导致其他影响;
- d. 从始至终只有骰子的竖直方向有动能,且反弹不会带来方向的偏移.

上面 4 个假设的约束性较强,使得弹跳模型局限性较大. 根据热力学模型的建立过程可知,模型的限制越多,模型与实际情况就越可能畸变. 三面骰子不像正方形骰子、异形体骰子,每个面都有精准的对称性,因此需做出一些条件假设求解三面骰子模型.

根据本节内容, $n=0$ 的情况与 4.3 节相同,现给出 $n=1, 2$ 时的实验数据,如表 5~6 所示.

表 5 $n=1, \eta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时骰子的下落情况

接触面	着地次数		
	正面	反面	侧面
水泥	144	152	140
PVC	150	157	149

表 6 $n=2, \eta = 0.391 2$ 时骰子下落情况

接触面	着地次数		
	正面	反面	侧面
水泥	11	12	144
PVC	13	17	138

由表5可知:当 $n=1$,接触面为水泥时,骰子的正面概率 $P_A=0.330$,反面概率 $P_B=0.349$,侧面概率 $P_S=0.321$,侧面相对偏差 $E_r=3.6\%$.

表5数据与理论值0.333较为符合,也就是说圆柱形骰子碰撞0次和1次的效果相差不大.

那么是否可以说在 $\eta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 下,骰子多次反弹后也相差不大呢?

猜想 $n=0,1$ 情况下,实验结果相差不大的原因只是由于碰撞1次带来的效果不特别明显,为了满足骰子只碰撞1次,需要调节高度来实现,在实验中,这种高度不足以产生特别明显的误差.圆柱形骰子是不完美对称的,因此碰撞之后会使骰子的运动方向改变.因此骰子具有水平方向的初速度,也会导致侧面的概率发生变化.

由图9可以看出,不完美对称的物体反弹以后,会偏离原来的运动方向,由能量守恒可知,骰子具有了水平方向的速度,根据第2章内容,骰子侧面着地的概率将会增加.

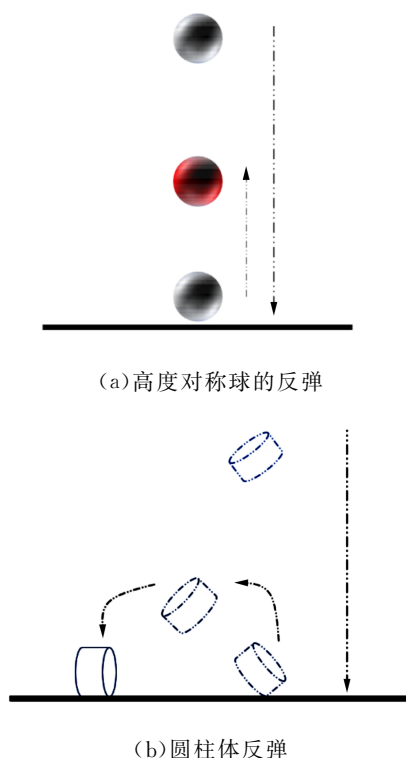


图9 高度对称球和圆柱体的反弹情况

通过简单的测试发现,骰子竖直落下,发生弹跳,侧面着地的次数会大大增加(表7),这样的结果与第2节的内容相符.所以给出的结论是:实验过程中,保持 $n=0$ 才最为合理.

表7 发生弹跳后的骰子下落情况

接触面	着地次数		
	正面	反面	侧面
水泥	45	36	74

由表6可知, $n=2$ 时,4.1中给的范围 $\eta>\frac{1}{2}$ 对碰撞模型同样适用.

综上所述几何和反弹模型共同说明:圆柱形骰子须无反弹、无水平初速度的投掷才能保证其等概率着地.

6 标准骰子实验

采用3D打印技术制作骰子进行实验,如图10所示,实验中 $\eta=\sqrt{3}/2$;用Pycharm软件模拟,根据前文内容,得出骰子的下落情况如表8所示.



图10 3D打印骰子

表8 标准骰子的下落情况

接触面	着地次数		
	正面	反面	侧面
水泥	336	340	335
PVC	334	349	337

接触面为水泥面时,骰子正面概率 $P_A=0.332$,反面概率 $P_B=0.336$,侧面概率 $P_S=0.331$,侧面相对偏差 $E_r=0.6\%$.

接触面为PVC面时,骰子正面概率 $P_A=0.327$,反面概率 $P_B=0.342$,侧面概率 $P_S=0.330$,侧面相对偏差 $E_r=0.9\%$.

以上实验结果与理论分析较吻合,因此采取 $\eta=\sqrt{3}/2$ 较合理.

利用Pycharm软件进行模拟如图11所示,模拟投掷次数为1000次,做了10次模拟的数据如表9所示.

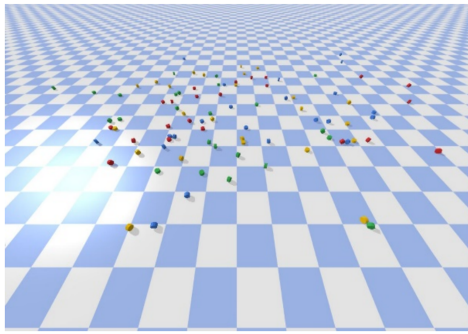


图 11 Pycharm 软件模拟

从实验数据上可以看出,实验结果与理论分析较吻合,如果需要更接近 333 的数据,可以通过调节滚动摩擦力来实现。

表 9 Pycharm 软件模拟投掷情况

投掷	着地次数		
	正面	反面	侧面
1	355	336	309
2	300	337	363
3	329	329	342
4	359	334	307
5	314	356	330
6	323	346	331
7	346	308	346
8	350	313	337
9	307	330	363
10	327	332	341

7 结 论

本文研究了 2022 年 CUPT 三面骰子题目,讨论了 4 种模型,从不同角度思考都可能使结果不同,表明当物体不再具有完美的对称性时,最终的结果不只依靠于模型的几何特征,还需要考虑骰子的物理性质。通过实验验证理论模型,并从中找出模型的问题,最后得到使骰子等概率着地的模型比例为 $\eta = \sqrt{3}/2$ 。其中,几何和弹跳模型说明了圆柱形骰子必须无反弹的碰撞才能保证等概率着地,因此制作圆柱形骰子的材质应为刚体。

参考文献:

- [1] Blais K B S. Teacher's corner teaching bayesian model comparison with the three-sided coin [J]. The American Statistician, 2007, 61(3):239-244.
- [2] 潘葳,王瑗. 刚体转动惯量实验的改进[J]. 物理实验, 2018, 38(10):17-20.
- [3] Huber A, Todorinov V. Experimental test of fair three-sided coins [J]. European Journal of Physics, 2021, 42(2):025802.
- [4] Yong E H, Mahadevan L. Probability, geometry, and dynamics in the toss of a thick coin [J]. American Journal of Physics, 2011, 79(12):1195-1201.
- [5] Diaconis P, Holmes S, Montgomery R. Dynamical bias in the coin toss [J]. SIAM Review, 2007, 49(2):211-235.
- [6] Bondi S H. The dropping of a cylinder [J]. European Journal of Physics, 1993, 14(3):136-140.

Dynamics analysis and geometry characteristics of three-sided dice

FAN Xiang-bin, LU Yi-he, LIU Xiao-na, WANG Tie-cheng

(College of Physical and Electronic Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: Based on the topic of CUPT No. 7 “three-sided dice” in 2022, the geometric characteristics and physical properties of the dice were explored when the probabilities of the dice standing on the side, heads and tails were the same. Several models were proposed and verified by experiments. Considering the influence of many factors on the probabilities of dice, such as throwing method, rebound characteristics, contact surface material and so on, the geometric characteristics and throwing rules of three-sided dice were determined.

Key words: China Undergraduate Physics Tournament; probability; three-sided dice; geometric characteristics; rebound characteristics; throwing method

[责任编辑:郭伟]